

DIMENSJONERING FOR JORDSKJELV - Teorigrunnlag, regelverk og beregninger

av

NINA ØYSTAD-LARSEN

MASTEROPPGAVE

for graden

Master i Anvendt matematikk og mekanikk

(Master of Science)



*Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet
Universitetet i Oslo*

Mai 2010

*Faculty of Mathematics and Natural Sciences
University of Oslo*

DIMENSJONERING FOR JORDSKJELV - Teorigrunnlag, regelverk og beregninger

av

NINA ØYSTAD-LARSEN

MASTEROPPGAVE

for graden

Master i Anvendt matematikk og mekanikk

(Master of Science)



*Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet
Universitetet i Oslo*

Mai 2010

*Faculty of Mathematics and Natural Sciences
University of Oslo*

Forord

Denne oppgaven er mitt avsluttende arbeid for å oppnå mastergrad i anvendt matematikk og mekanikk ved studieretningen faststoffmekanikk på Universitetet i Oslo, Matematisk institutt. Før jeg begynte på mastergraden jobbet jeg i en rådgivende ingeniørbedrift, og der ble jeg kjent med innførelsen av regelverket NS 3491-12 som omhandler seismiske lastvirkninger på bygg. Det viste seg å være et sammensatt og komplisert regelverk som gjorde meg interessert i bakgrunnen for lastene som foreskrives. Samtidig er det mangel på kompetanse innen området siden det ikke har vært tradisjon for å dimensjonere bygg i Norge for lastvirkninger fra jordskjelv. Derfor ønsket jeg gjennom masteroppgaven min å sette meg inn i teorien det er nødvendig å kjenne til for å kunne dimensjonere for seismiske lastvirkninger. Dette hadde jeg ikke kunne gjennomføre uten støtte og hjelp fra mine veiledere Harald Osnes ved Universitetet i Oslo samt Magne Ganz og Hans Exner ved Rambøll. Jeg ønsker også å takke Thomas Fürst ved Rambøll som i likhet med mine veiledere har bistått med innspill og tid til faglige diskusjoner.

Fagområdet er bredt, og jeg har derfor hatt behov for støtte fra flere kanter. Jeg ønsker å takke Conrad Lindholm, Jorge Crempien, Dominik Lang og Emrah Erduran ved NORSAR, samt Geir Udahl ved Contiga AS fordi de tok seg tid til mine spørsmål. Også en stor takk til Farzin Shahrokhi ved Multiconsult for hjelp og faglige diskusjoner innen seismologi og geoteknikk. Farzin har bistått med beregning av fjærstivheter i kapittel 17. Til slutt vil jeg takke Torggrim Walle ved Engineering Data Resources AS for effektiv og grundig support i dataprogrammet Ansys, og Christian Hervold ved Norconsult Informasjonssystemer AS for tilsvarende utmerket support i dataprogrammet FEM-Design.

Oslo, mai 2010

Nina Øystad-Larsen

Abstract

During the past decades extensive research on earthquakes and seismic loads has been conducted. The reason for this is partly that earthquakes strike rather frequently, and partly that they often bring devastating consequences. As a result, there has been developed several methods of analysis and computer programmes that makes it possible to check the capacity of a building against the seismic loads, that presumably will occur during the life span of the building. These methods are most effective for buildings with simple geometry based on continuous masses. The strike of earthquakes that bring risk of death and buildings collapsing is rare in Norway. But both historical documents and research show that this type of earthquakes previously have, and still will, strike. As a result of the risk of new earthquakes and the new methods of analysis, it has been decided that buildings in Norway must be designed for seismic loads.

When the ground shakes it brings energy to the buildings in the area. This energy can be dissipated in different ways. In this thesis, we show how to compute the seismic loads from this type of processes. At first we consider a system with just one degree of freedom and subsequently more general structures is analysed. Both exact and simplified methods of analysis is explained.

In march 2010 the norwegian building code for seismic loading was changed from NS 3491-12 to NS-EN 1998-1+NA:2004. This thesis includes an introduction to both codes with emphasis on the theoretical background for the methods and formulas as well as the differences between the codes. We calculate certain seismic loads on a hypothetical building using methods from the codes and compare the results. This leads to the conclusion that the new code in most cases is more labour-intensive and gives larger loads than the old one.

The theory is also used to discuss important aspects to seismic loads through multiple examples. We go through the importance of ground conditions, geometry and material choice. Both good and adverse solutions are shown, and we explain the theoretical background for the results in every example. We learn that it is favourable to spread the components for horizontal loads over the plan of each floor and to keep these components continuous through the stories, and that it is also favourable to place the building on firm ground.

This thesis can be seen as an introduction that include theory, codes and important aspects to seismic design.

Sammendrag

Det har i løpet av de siste tiårene blitt forsket intensivt på jordskjelv og seismiske lastvirkninger. Dette skyldes bl.a. at jordskjelv opptrer relativt hyppig og at konsekvensene ofte er meget alvorlige. Det har derfor blitt utviklet flere beregningsmetoder og dataprogrammer som gjør det mulig relativt hurtig å kontrollere om bygg som har regulær geometri og er fundamentert på kontinuerlige masser, vil tåle jordskjelv av en styrke som med stor sannsynlighet vil inntreffe innenfor byggets forventede levetid. I Norge oppstår det sjelden jordskjelv i en størrelsesorden som medfører risiko for bygningsskader og dødsfall, men både historiske dokumenter og forskning viser at denne typen skjelv tidligere har og fortsatt vil oppstå. Derfor har det som en konsekvens av risikoen for nye skjelv og de nye analysemetodene, blitt innført krav om at også norske bygg skal kontrolleres for seismiske lastvirkninger.

Når grunnen utsettes for rystelser tilføres byggene i området energi som kan tas opp på forskjellige måter. I denne oppgaven viser vi hvordan lastvirkningene fra denne typen prosesser kan beregnes. Vi ser først på et system med en enkelt frihetsgrad og deretter på mer generelle konstruksjoner. Både nøyaktige og forenklede analysemetoder gjennomgås.

I mars 2010 ble det norske regelverket for prosjektering av konstruksjoner for seismiske lastvirkninger endret fra NS 3491-12 til NS-EN 1998-1:2004+NA:2008. Denne oppgaven inneholder en innføring i begge regelverkene, og det legges vekt på den teoretiske bakgrunnen for metodene og formlene som er angitt, samt forskjellen mellom regelverkene. Vi gjennomfører beregninger av utvalgte seismiske lastvirkninger på et tenkt bygg ved bruk av analysemetoder fra regelverkene, og deretter sammenliknes resultatene. De viser at analysene i henhold til det nye regelverket i de fleste tilfeller er mer arbeidskrevende og gir større lastvirkninger enn det gamle.

Teorien er videre benyttet til å diskutere viktige forhold i forbindelse med seismiske laster gjennom en rekke eksempler. Her gjennomgås betydningen av grunnforhold, geometri og bygningsmaterialer. Både gode og uheldige løsninger betraktes, og i hvert tilfelle forklares teorien bak resultatene. Det viser seg at det med tanke på seismiske lastvirkninger er gunstig at byggets avstivende elementer både er kontinuerlige gjennom alle etasjene og jevnt fordelt i planet, samt at det fundamenteres på faste grunnforhold.

Oppgaven kan ses som en innføring i prosjektering for seismiske laster, der teoribakgrunn, regelverk og viktige aspekter gjennomgås.

Innhold

Notasjon	xiii
1 Innledning	1
1.1 Bakgrunn	1
1.2 Spesifikasjon av oppgaven	2
1.3 Oppbygging av oppgaven	3
I Teori	5
2 Innledning til hoveddel I	6
3 Dynamikk	7
3.1 Innledning	7
3.2 En-frihetsgradsystem utsatt for jordskjelv	7
3.3 Numerisk løsning av den dynamiske likevektligningen	10
3.4 Generaliserte en-frihetsgradsystemer	12
3.5 Systemer med flere frihetsgrader	16
3.6 Respons til flerfrihetsgradsystem utsatt for jordskjelv	19
3.7 Forenkling av konstruksjonen	22

3.8 Andre ordens effekter	25
4 Seismologi	26
4.1 Innledning	26
4.2 Mekanismer og begreper	27
4.3 Seismiske lastvirkninger på konstruksjoner	28
4.4 Grunn og fundamentering	31
5 Respons- og designspekter	33
5.1 Innledning	33
5.2 Responsspektre for lineært elastiske systemer	33
5.3 Elastisk designspekter	44
5.4 Plastisk responsspekter	47
6 Responsspekteranalyse	54
6.1 Innledning	54
6.2 Fouriertransformasjon	55
6.3 Sammenheng mellom last og respons	57
6.4 Autokorrelasjon og spektral tetthet	60
6.5 Responsen til hvit støy	62
6.6 Kombinasjonsmetoder	65
6.7 Respons ved grunnakselerasjon i flere retninger samtidig	70
6.8 Responsspekteranalyse for elasto-plastiske systemer	72

II Sammenlikning av regelverk	76
7 Innledning til hoveddel II	77
8 Modal analyse utført for hånd	81
8.1 Innledning	81
8.2 Beregning av svingeformer og -perioder	82
8.3 Regelverket NS 3491-12	91
8.4 Regelverket NS-EN 1998-1	103
8.5 Grunnforhold	111
8.6 Sammenlikning og diskusjon	114
9 Analyse av generaliserte en-frihetsgradsystemer	118
9.1 Innledning	118
9.2 NS 3491-12 - Svingeform fra modal analyse	119
9.3 NS 3491-12 - forenklet antatt svingeform	123
9.4 NS-EN 1998-1 - Svingeform fra modal analyse	129
9.5 NS-EN 1998-1 - Forenklet antatt svingeform	132
9.6 Sammenlikning og diskusjon	135
10 Modale 2D-analyser fra dataprogram	137
10.1 Innledning	137
10.2 Ansys og NS 3491-12	138
10.3 Ansys og NS-EN 1998-1	145
10.4 Sammenlikning og diskusjon	147

11 Modale 3D-analyser fra dataprogrammer	149
11.1 Innledning	149
11.2 Ansys og NS 3491-12	150
11.3 Ansys og NS-EN 1998-1	158
11.4 FEM-Design og NS 3491-12	159
11.5 FEM-Design og NS-EN 1998-1	168
11.6 Sammenlikning og diskusjon	174
12 Oppsummering av hoveddel II	177
III Viktige aspekter	182
13 Innledning til hoveddel III	183
14 Antallet etasjer	184
14.1 Innledning	184
14.2 Teori og resultater	184
15 Fordeling av masse og stivhet	187
15.1 Innledning	187
15.2 Betongskiver leddet til hulldekker som spenner i x -retning	188
15.3 Betongskiver leddet til hulldekker som spenner i y -retning	193
15.4 Betongskiver og flatdekker	193
15.5 Soft story	195
15.6 Lett øverste etasje	197
15.7 Tung øverste etasje	198

15.8 Sammenlikning og diskusjon	200
16 Torsjon	202
16.1 Innledning	202
16.2 Ikke jevnt fordelt stivhet	202
17 Opplagerbetingelser	207
17.1 Innledning	207
17.2 Direktefundamentert kjeller på myke masser	210
17.3 Direktefundamentert kjeller på faste løsmasser	212
17.4 Vertikale peler og jordtrykk	214
17.5 Skrå peler	216
17.6 Sammenlikning og diskusjon	217
18 Duktilitet og dempning	219
18.1 Innledning	219
18.2 Duktilitet	219
18.3 Dempning	220
19 Diskusjon og konklusjon	222
A Beregninger	225
A.1 Vedlegg til avsnitt 8.5 - NS-EN 1998-1 og løsmasser	225
B Script til Matlab-filer	230
B.1 Figur av kvadratet av absoluttverdien av frekvensresponsfunksjonen	230
B.2 Figur av spektral tetthet for tilnærmet hvit støy	231

B.3	Korrelasjonskoeffisient	232
B.4	Figur av respons ved grunnakselerasjon i to hovedretninger	233
B.5	Naturlige vinkelfrekvenser dobbeltsymmetrisk bygg	234
C	Script til Ansys	236
C.1	Respons i x -retning i henhold til NS 3491-12	236
C.2	3D-modell belastet i x -retning i henhold til NS 3491-12	241
	Referanser	249

Notasjon

Generelt

Symboler blir forklart der de brukes første gang.

Matriser og vektorer er markert med fete typer.

Derivasjon er markert med prikk over den deriverte funksjonen. For eksempel er akselerasjonen i et punkt, $\ddot{u}(t)$, lik den deriverte av hastigheten, $\dot{u}(t)$, som er den deriverte av forskyvningen, $u(t)$.

Determinanten til matrisen \mathbf{A} skrives $\det \mathbf{A}$.

Den kompleks konjugerte av tallet C skrives C^* .

Regelverket NS-EN 1998-1:2004+NA:2008 forkortes generelt til NS-EN 1998-1 og “eurokoden” mens NS 3491-12:2004 forkortes til NS 3491-12.

I avsnittene der responsen beregnes for et bygg i flere etasjer, betegnes bidraget til responsen i etasje k fra mode j r_{kj} . I en vektor som inneholder responsen for alle etasjene, står responsen i første etasje nederst, over den står responsen i andre etasje osv. Det betyr at r_{1j} står nederst i vektoren \mathbf{r}_j . Den første suffiksen viser altså ikke til plasseringen i vektoren, men til etasjen i bygget.

Symboler

Store latinske bokstaver

$2D$	Todimensjonal
$3D$	Tredimensjonal
A	Tverrsnittsareal
A_s	Tverrsnittsareal søyler
A_v	Tverrsnittsareal vindkryss
$B30$	Betongkvalitet
$B45$	Betongkvalitet
C	Modal dempningsmatrise
CQC	Kombinasjonsmetoden “komplett kvadratisk kombinasjon”
D	Maksimal forskyvning av system med en frihetsgrad
$D(t, T, \xi)$	Forskyvning av system med en frihetsgrad
E	Elastisitetsmodul
$E(x)$	Forventningsverdien til x
E_K	Maksimal kinetisk energi
E_S	Maksimal tøyningsenergi
F	Tilsvarende statisk lastvektor
F	Tilsvarende statisk last
F_D	Dempningskraft
F_G	Last fra geometriske effekter
F_I	Tregghetskraft
F_S	Elastisk eller inelestisk motstandskraft
F_0	Maksimal elastisk kraft i det tilsvarende elastiske system
F_y	Kraften som initierer flyt i et elasto-plastisk system
\bar{F}_y	Normalisert flytestyrke
H	Konstruksjonens totale høyde
$H(\bar{\omega})$	Frekvensresponsfunksjonen
H_{vk}	Matrise hvis komponent i rad k er lik horisontallasten i ett vindkryss i etasje k
$\text{Im}[a]$	Koeffisienten til den imaginære delen av tallet a . Dersom $a = b + i c$, er $\text{Im}[a] = c$
K	Modal stivhetsmatrise
L_e	Avstanden mellom de to ytterste horisontalt avstivende konstruksjonsdelene målt vinkelrett på retningen til grunnakselerasjonen
M	Moment
M	Modal massematrise

MPA	Analyse ved påført forskyvning
$R(\tau)$	Autokorrelasjonen til en stasjonær prosess
$\text{Re}[a]$	Den reelle delen av tallet a . Dersom $a = b + i c$, er $\text{Re}[a] = c$
S	Forsterkningsfaktor som avhenger av grunnforholdene i NS-EN 1998-1
S_e	Pseudoakselerasjon
S_{ed}	Dimensjonerende pseudoakselerasjon i henhold til regelverk
SRSS	Kombinasjonsmetoden "kvadratroten av summen av kvadratene"
T	Naturlig svingeperiode, egensvingeperiode
T_B	Egensvingeperioden ved overgangen til konstant pseudoakselerasjon i NS-EN 1998-1
T_C	Egensvingeperioden ved overgangen fra det akselerasjonsensitive til det hastighet-sensitive området i NS-EN 1998-1
T_D	Egensvingeperioden ved overgangen fra det hastighetsensitive til det forskyvningsensitive området i NS-EN 1998-1
UMRHA	Ukoblet tidshistorieanalyse
V	Pseudohastighet
V	Skjærkraft
Z	Mengden av hele tall

Små latinske bokstaver

a_g	Dimensjonerende grunnakselerasjonen på fjell i NS 3491-12 og NS-EN 1998-1
c	Viskøs dempningskoeffisient
f	Naturlig frekvens
f_{ctm}	Strekkefasthet til betong
g	Tyngdeakselerasjon
h	Høyde
$h(t)$	Impulsresponsfunksjonen
k	Stivhet
\bar{k}	Kombinert stivhet, tar hensyn til andre ordens effekter
$k_{f,spiss}$	Faktor i NS 3491-12 som avhenger av referanseperioden for den dimensjonerende grunnakselerasjonen på fjell
k_G	Geometrisk stivhet
k_S	Forsterkningsfaktor i NS 3491-12 som avhenger av grunnforholdene
k_Q	Konstruksjonsfaktor i NS 3491-12
m	Masse
m_k	Masse i frihetsgrad k
m_k	Effektiv modal masse
q	Konstruksjonsfaktor i NS-EN 1998-1
$q_k(t)$	Vekttall for bidraget fra svingeform k
r	Respons
s_k	Bidraget fra mode k til lastvektoren
t	Tidsvariabel
t_d	Jordskjelvets varighet
u	Relativ forskyvning

u_0	Maksimal forskyvning av det tilsvarende elastiske system
u_g	Grunnens forskyvning
u_m	Maksimal forskyvning av elasto-plastisk system
u^t	Total forskyvning, dvs. $u^t = u + u_g$
u_y	Forskyvning av elasto-plastisk system når flyt initieres
z_k	Dekke k sin høyde over terreng eller fundament
$z(t)$	Tidsavhengig funksjon som benyttes for generaliserte en-frihetsgradsystemer

Store greske bokstaver

Φ	Matrise der hver kolonne er en svingeform
--------	---

Små greske bokstaver

γ_1	Seismisk faktor i NS 3491-12 og NS-EN 1998-1 som avhenger av konsekvensene ved funksjonssvikt. Verdiene for γ_1 er forskjellige i de to regelverkene, men formålet til faktoren er det samme
δ	Forstørrelsesfaktor for utilsiktet torsjon
δ	Forskyvning i forbindelse med bestemmelse av fjærstivheter
$\delta(t)$	Diracs deltafunksjon
η	Modifikasjonsfaktor for dempning
ι	Innflytelsessvektor for lasten på et system med flere frihetsgrader
λ	Korreksjonsfaktor i NS-EN 1998-1
μ	Duktilitetsfaktor
ν	Poissons tall
ξ	Dempningsforhold
ρ	Massetetthet
χ	Significance level i Ansys
ϕ	Egensvingeform, naturlig svingeform
ϕ_{ij}	Verdien til egensvingeform i i frihetsgrad j
ψ	Antatt egensvingeform for generaliserte en-frihetsgradsystemer
ω	Naturlig vinkelfrekvens
ω_D	Dempet vinkelfrekvens

Kapittel 1

Innledning

1.1 Bakgrunn

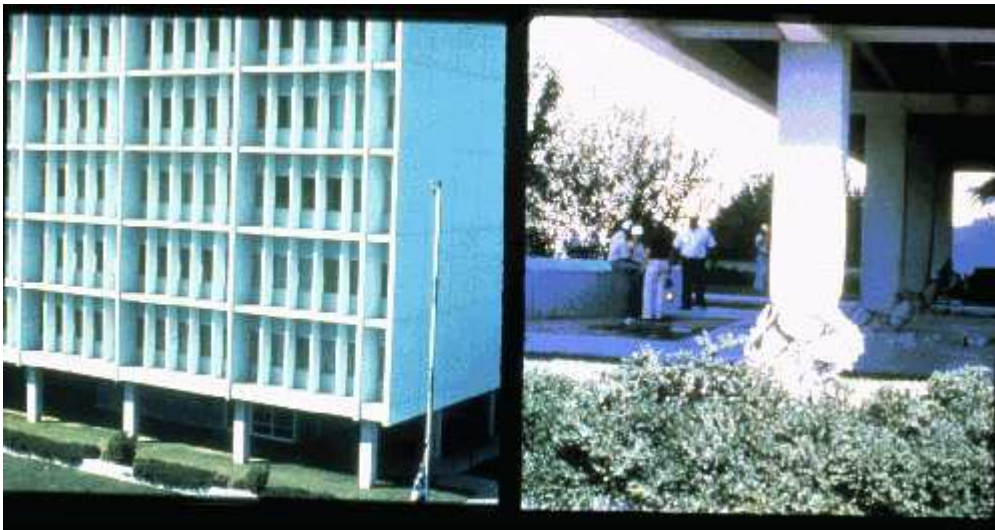
To pionerer innen bygningsprosjektering for seismiske lastvirkninger, Nathan M. Newmark (1910-1981) og Emilio Rosenblueth (1926-1994), har uttalt følgende [8]:

Earthquake effects on structures systematically bring out the mistakes made in analysis, design, and construction, even the minutest mistakes.

Til tross for at analysemetodene er blitt betydelig mer nøyaktige de senere år, og at faren for jordskjelv ikke er spesielt stor i Norge, synes jeg dette sitatet setter ord på det interessante ved fagfeltet. Lastvirkningene fra jordskjelv på et bygg oppstår fordi grunnens akselerasjon og forskyvning gjør at konstruksjonen deformeres. Rystelsene i forbindelse med jordskjelv er svært varierende, og det er umulig å forutsi nøyaktig hvordan fremtidige jordskjelv vil påvirke en gitt konstruksjon. Samtidig kan et grunnakselerasjonsforløp som ikke skader et bygg, være helt ødeleggende for et annet. Prosjekteringen må derfor i stor grad baseres på erfaring. Her er det en utfordring at arkitekturen utvikles slik at konstruksjoner blir stadig slankere og billigere. Erfaringen må altså kombineres med stor faglig forståelse for hvordan lastvirkningene oppstår. Enda en ting som bidrar til usikkerheten rundt lastvirkningene, er at beregningene er store og tidkrevende når vi simulerer et grunnakselerasjonsforløp på en konstruksjon. Dette gjøres derfor ikke i vanlige prosjekter i Norge. I stedet brukes tilnærmede metoder til å kombinere lastvirkningene fra et gjennomsnitt av tidligere jordskjelv.

Norge er som nevnt, et område med relativt liten seismisk aktivitet. Jordskjelv som har ødeleggende virkninger på konstruksjoner, opptrer sjelden. Det har derfor ikke vært tradisjon for å dimensjonere bygg for seismiske lastvirkninger her i landet. Dette ble endret i desember 2004 da NS 3491-12 ble gjort gjeldende. Den manglende erfaringen på området er fortsatt en utfordring for det rådgivende ingeniørmiljøet. Fagområdet har vært under stor utvikling i løpet av de siste tiårene, og det er sannsynligvis derfor det nå har blitt innført krav om at også norske bygg skal dimensjoner-

es for seismiske lastvirkninger. Det utvikles stadig hurtigere beregningsprogrammer og -metoder, og det måles stadig flere faktiske grunnakselerasjonsforløp [22]. Samtidig er det fortsatt komplisert å beregne lastvirkningene fra jordskjelv fordi belastningen avhenger av mange faktorer og vi ikke vet nøyaktig hvordan et fremtidig jordskjelv vil forløpe. Viktige parametre i denne sammenhengen er foruten geografisk plassering bl.a. byggets masse og stivhet samt fordelingen av disse. Grunnforhold og fundamenteringsprinsipp er også blant de meget utslagsgivende faktorene. Det skal altså tas hensyn til en rekke forhold, og de mange bygningsskadene fra jordskjelv gjennom tidene vitner om kompleksiteten i beregningene. Figur 1.1 illustrerer dette. Den viser The Imperial County Services Building i California. Til høyre ses en skadet betongsøyle etter jordskjelvet i Imperial Valley den 15. oktober 1979. Bygget var prosjektert i henhold til gjeldende regelverk for lastvirkninger fra jordskjelv i 1971, men tålte likevel ikke skjelvet som kom 8 år senere [12].



Figur 1.1: Skade på The Imperial County Services Building i California etter jordskjelvet i Imperial Valley 15. oktober 1979

1.2 Spesifikasjon av oppgaven

Oppgaven omhandler seismiske lastvirkninger, herunder teorigrunnlaget for hvordan disse oppstår og virker, hva norske regelverk sier om dimensjonering av bygg for disse, hvordan de kan beregnes og hvilke aspekter som er utslagsgivende for påvirkningene. Nedenfor er det gitt et utdrag av oppgaveteksten.

Innhold

Oppgaven er definert som følger:

- Sette seg inn i aktuelt regelverk og teorigrunnlag
 - Sammenlikne NS3491-12 og Eurocode 8.

- Forstå teorigrunnlaget for formler i regelverk
- Beskrive forskjellige aspekter som er viktige ved jordskjelvdimensjonering
 - Ulike fundamenteringsprinsipper (f.eks. direkte fundamentering på leire, pelefundamentering (vertikale peler og skrå peler)) og deres effekt på opplagerbetingelser og bygningers oppførsel med tanke på jordskjelvlaster.
 - Avstivning av bygninger og effekten dette har på jordskjelvlaster/lasteffekter.
 - Påbygg/endring av bygninger - hva slags endringer av eksisterende bygg gjør at det må dimensjoneres for jordskjelv (blir konsekvensene så store at en f.eks. bør fraråde en byggherre å bygge på en etasje).
- Praktisk dimensjonering
 - Dimensjonering av en enkel dobbeltsymmetrisk bygning, en mer generell/komplisert bygning og evt. påbygg av eksisterende bygning.
 - Dimensjoneringen skal så langt det lar seg gjøre utføres vha. håndberegninger og elementanalyse (benytt FEM-Design, samt ANSYS og/eller Comsol Multiphysics). I Eurocode 8 er det listet opp en rekke beregningsmetoder av varierende kompleksitet. Flere av disse bør vurderes/benytt.
- Anbefalinger og diskusjon

Rapportering

Det skal skrives en rapport der teorigrunnlag, regelverk (og hovedforskjeller mellom disse), interessante aspekter (fundamenteringsprinsipper, avstivning og påbygg/endringer), dimensjoneringsmetoder og prosedyrer (håndberegninger og numeriske beregningsmetoder), resultater, diskusjoner og lignende presenteres på en oversiktlig måte. Rapporten skal sette problemet inn i en sammenheng. En diskusjon av forskjellige analysemetoder som kan benyttes, inkluderes, og denne bør lede fram til noen anbefalinger.

Jeg har i overensstemmelse med veilederne mine gjort følgende avgrensninger:

- I stedet for å dimensjonere bygg har jeg beregnet noen karakteristiske seismiske lastvirkninger i eksemplene mine
- Jeg har ikke gått inn på de juridiske reglene omkring hva slags endringer av eksisterende bygg som medfører, at de må dimensjoneres for jordskjelv. Jeg har derimot undersøkt og diskutert hvilke endringer som vil gi store seismiske lastvirkninger

1.3 Oppbygging av oppgaven

Oppgaven er delt i tre hoveddeler, der den første tar for seg teorigrunnlaget som benyttes i de neste to delene. Den andre inneholder sammenlikning av regelverkene og ulike beregningsmetoder, og den siste delen handler om viktige aspekter ved dimensjonering for seismiske lastvirkninger.

Hoveddel **I** består foruten en innledning av kapittel 3 til 6. Kapittel 3 gir en kort innføring i grunnleggende dynamikk og en mer utførlig gjennomgang av analysemetoder som vi bruker senere i rapporten. I kapittel 4 ser vi på mekanismene bak et jordskjelv samt hvilke forhold som har innvirkning på seismiske lastvirkninger. Kapittel 5 introduserer responsspektret som er et viktig redskap innen seismisk prosjektering. Vi ser på både lineært elastiske og elastoplastiske systemer. I kapittel 6 utledes kombinasjonsmetoder som gjør det mulig å benytte responsspektre til å anslå responsen til systemer med flere frihetsgrader utsatt for jordskjelv.

Hoveddel **II** starter også med en innledning der geometrien og de seismiske forholdene til et tenkt dobbeltsymmetrisk bygg gjennomgås. Resten av hoveddel **II** er viet til beregninger av de seismiske lastvirkningene på dette bygget. Resultatene baseres på forskjellige analysemetoder; modal analyse (håndberegninger) i kapittel 8, generaliserte en-frihetsgradsystemer i kapittel 9, modale todimensjonale analyser i kapittel 10 og modale tredimensjonale analyser i kapittel 11. I hvert av disse kapitlene beregnes lastvirkningene i henhold til både NS 3491-12 og NS-EN 1998-1, og resultatene sammenliknes med hverandre.

I hoveddel **III** beregner vi de seismiske lastvirkningene på en rekke konstruksjoner som er nært beslektet med den i hoveddel **II**. I hvert avsnitt er et forhold endret, og det diskuteres hvordan forandringen påvirker lastvirkningene. Kapittel 14 til 16 omhandler geometriske forhold, mens kapittel 18 går inn på egenskapene til materialene som benyttes. I kapittel 14 ser vi på viktigheten av antallet etasjer. Her legges det vekt på konsekvensene det vil ha for en eksisterende konstruksjon å bygge på flere etasjer. Kapittel 15 handler om fordelingen av masse og stivhet i konstruksjonen, herunder ulike avstivningssystemer og materialvalg samt arkitektoniske valg. Kapittel 16 handler om konsekvensene av at mange bygg ikke er dobbeltsymmetriske. I kapittel 17 tar vi for oss opplagerbetingelser. Siden de seismiske lastene oppstår pga. bølger i grunnen er grunnforholdene og fundamenteringsmetoden av stor betydning for lastvirkningene. Derfor undersøker vi konsekvensene av ulike geometriske og geotekniske forhold. I kapittel 18 ser vi på hvordan ulike materialer og byggetekniske valg påvirker lastvirkningene fra jordskjelv samt byggets evne til å ta opp disse.

Oppgaven avsluttes med at de viktigste resultatene diskuteres i kapittel 19. Her sammenfatter vi hovedtrekkene i resultatene til en konklusjon.

Del I

Teori

Kapittel 2

Innledning til hoveddel I

Vi begynner med en gjennomgang av teorien som er nødvendig, for at vi i hoveddel **II** og **III** skal kunne

- sammenlikne regelverkene NS 3491-12 og NS-EN 1998-1
- undersøke hvilke aspekter som er av stor betydning i forbindelse med dimensjonering for seismiske lastvirkninger

Kapittel **3** handler om dynamikk. Her defineres viktige størrelser, og ulike faktorer som er avgjørende for jordskjelvsbelastning diskuteres. Vi ser på behovet for numeriske tidsstegmetoder for beregning av et systems respons på et gitt jordskjelv, og gjennomgår forskjellige analysemetoder som vi skal bruke i del **II**. Vi argumenterer også på hvordan en konstruksjon kan forenkles så det blir praktisk mulig å sette opp en matematisk modell for responsen ved jordskjelv. Til slutt diskuteres geometrisk ikke-linearitets innflytelse på lastvirkningene.

I kapittel **4** gjennomgås de grunnleggende mekanismene i et jordskjelv, og vi ser på hvilke forhold som har innvirkning på lastvirkningene fra jordskjelv på konstruksjoner.

Kapittel **5** omhandler såkalte responsspektre. De viser maksimalverdien til en respons for et enhetsgradsystem utsatt for jordskjelv som funksjon av den naturlige vinkelfrekvensen til systemet. her undersøker vi effekten av dempning og forholdet mellom masse og stivhet. Vi ser på responspektre for både lineært elastiske og elasto-plastiske systemer samt designspektre som benyttes ved prosjektering av nye konstruksjoner.

I kapittel **6** utledes metoder hvormed tilnærmede verdier for responsen til systemer med flere frihetsgrader kan bestemmes ut fra responspektre.

Kapittel 3

Dynamikk

3.1 Innledning

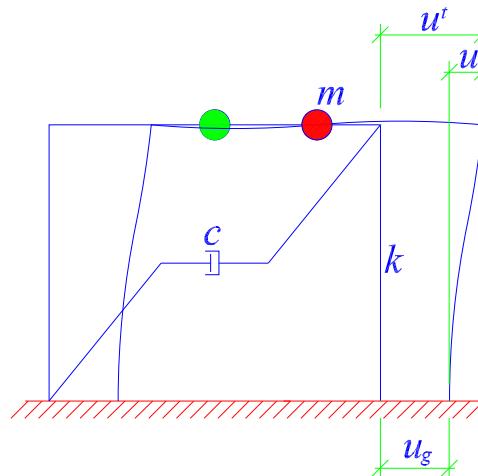
Lastvirkningene på konstruksjoner som utsettes for et jordskjelv, varierer med tiden. Seismiske lastvirkninger er altså dynamiske. Derfor skal vi i dette første kapitlet av oppgaven ta en kort gjennomgang av en del grunnleggende aspekter ved dynamikk. Avsnitt 3.2 omhandler responsen til et en-frihetsgradsystem utsatt for grunnakselerasjon. Her defineres viktige størrelser innenfor dynamikk, og ulike faktorer som er avgjørende for jordskjelvsbelastning, diskuteres. Deretter ser vi på prinsippene for numerisk beregning av responsen til et en-frihetsgradsystem utsatt for et gitt jordskjelv i avsnitt 3.3. Under visse forutsetninger er det mulig å benytte metodene, som er utviklet for en-frihetsgradsystemer, på systemer med flere frihetsgrader. I avsnitt 3.4 bevises dette og vi utleder fremgangsmåten.

I avsnitt 3.5 begynner vi å se på systemer med flere frihetsgrader. Vi starter med en gjennomgang av modal analyse. Denne gjør det mulig å beregne responsen til lineært elastisk system med klassisk demping og n frihetsgrader ved å superponere responsen fra n en-frihetsgradsystemer. I avsnitt 3.6 spesialiseres metoden til systemer utsatt for jordskjelvsbelastning. Deretter følger en gjennomgang av hvordan en konstruksjon kan forenkles så det blir praktisk mulig å sette opp en matematisk modell for responsen ved jordskjelv i avsnitt 3.7. Helt til slutt, i avsnitt 3.8, betraktes innflytelsen av andre ordens effekter på responsen.

3.2 En-frihetsgradsystem utsatt for jordskjelv

Figur 3.1 viser en svært forenklet konstruksjon som er utsatt for akselerasjon av grunnen. Det kan f.eks. være en ramme eller et bygg bestående av en enkelt etasje. Dersom

- Vi ser bort fra aksialdeformasjonene i søylene



Figur 3.1: En-frihetsgradsystem. Grunnens forskyvning (u_g) skaper en relativ forskyvning (u)

- Det forutsettes at forskyvningene av rammen forblir små
- Vi utnytter at massen er samlet i ett punkt

har systemet kun en frihetsgrad for forskyvning; nemlig horisontal translasjon av bjelken. Massen kan i teorien også svinge vertikalt, men siden grunnakselerasjonen er horisontal er en vertikal frihetsgrad i bjelkens midtpunkt overflødig. Det er nyttig å kunne beregne størrelsen på den horisontale deformasjonen siden vi ut ifra denne kan bestemme belastningen (spenninger og tøyninger) i hele konstruksjonen. I den forenklede modellen av den virkelige konstruksjonen er systemets masse, betegnet m i figuren, samlet i bjelkens midtpunkt. Det betyr at hele massen utsettes for den samme bevegelsen, og at forskyvningen ikke har noen vertikal komponent. Dette stemmer ikke med virkeligheten, for massen er egentlig fordelt over hele konstruksjonen, og det er ikke alle konstruksjonsdelene som forskyves like mye. Deler av bjelken vil bevege seg vertikalt, og søylenes forskyvning varierer fra null i bunnen til u i toppen. I praksis viser det seg at antakelsen om at massen betraktes som samlet i ett diskret punkt, ikke har avgjørende innflytelse på resultatene som oppnås i analysen. Det kommer vi tilbake til i avsnitt 3.7.

Når konstruksjonen utsettes for grunnakselerasjon, vil forskyvningen av bjelken, $u^t(t)$, ikke være lik forskyvningen av grunnen, $u_g(t)$. Forskjellen mellom forskyvningene, $u(t) = u^t(t) - u_g(t)$ medfører at det opptrer krefter i søylene og den viskøse demperen som er vist i figuren. Disse kreftene vil virke mot bevegelsen. I lineært elastiske tilfeller er kraften i søylene proporsjonal med den relative forskyvningen av toppbjelken, dvs. $F_S = k u(t)$. Dempningen i en konstruksjon er årsaken til at den slutter å bevege seg en stund etter at belastningen er opphørt. Det finnes mange bidrag til dempning i enhver konstruksjon. Eksempler er friksjon mellom bærende og ikke-bærende konstruksjonsdeler, åpning og lukking av riss og friksjon i knutepunkter [8]. Disse har alle en reduserende virkning på bevegelsen, men de virker ikke på samme vis. Det er derfor generelt ikke mulig å beregne den eksakte dempningen i en konstruksjon. I stedet blir den vanligvis anslått ut fra forsøk som er utført på lignende konstruksjoner. Med mindre det er bygd inn apparater som skal øke dempningen på en bestemt måte, f.eks. friksjonsdempere, kan den totale dempningen

vanligvis betraktes som viskøs dempning. Det vil si at dempningskraften er proporsjonal med hastigheten, $F_D = c \dot{u}(t)$. Fra D'Alemberts prinsipp og Newtons andre lov får vi den dynamiske likevektsligningen med $F_D = c \dot{u}(t)$ og $F_S = k u(t)$,

$$c \dot{u}(t) + k u(t) = -m \ddot{u}^t(t) \quad \Leftrightarrow \quad (3.1)$$

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = -m \ddot{u}_g(t) \quad \Leftrightarrow \quad (3.2)$$

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = -\ddot{u}_g(t), \quad \text{der} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{og} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}}. \quad (3.3)$$

Her har vi innført to parametre, den naturlige vinkelfrekvensen ω og dempningsforholdet ξ . Den naturlige vinkelfrekvensen er vinkelfrekvensen konstruksjonen har ved fri svingning dersom den ikke er dempet. Dempningsforholdet angir graden av dempning. Dersom $\xi = 0$ er svingningen ikke dempet, og bevegelsen $u(t)$ vil ved fri svingning fortsette i det uendelige som en sinusbølge med konstant amplitude. Dersom $\xi \geq 1$ vil konstruksjonen gå direkte til sin statiske likevektsposisjon uten å svinge, og dempningskoeffisienten som gir $\xi = 1$, kalles derfor kritisk dempning. Dempningsforholdet blir ofte angitt i prosent av kritisk dempning, så $\xi = 0$ tilsvarer 0 % og $\xi = 1$ tilsvarer 100 %. Et dempningsforhold som er i størrelsesordenen $0 < \xi < 1$, medfører at konstruksjonens forskyvning ved fri svingning vil ha stadig mindre amplitude og en vinkelfrekvens som er gitt av uttrykket

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (3.4)$$

Et dempet system svinger altså med en frekvens som er mindre enn den naturlige vinkelfrekvensen ω . De fleste konstruksjoner har et dempningsforhold på under 20 % av kritisk dempning, og bygg har vanligvis dempningsforhold på under 10 %. For så små dempningsforhold er den dempede vinkelfrekvensen tilnærmet lik den naturlige vinkelfrekvensen, og vi vil derfor ikke skille mellom de to i det videre. Tabell 3.1 viser typiske dempningsforhold for bygg basert på materialtype og -utnyttelse [8, 22, 23]. Som det kommer frem i tabellen, økes dempningsforholdet til en konstruksjon med utnyttelsesgraden, det avhenger altså av forskyvningen. Denne sammenhengen neglisjeres vanligvis, og det velges et konstant dempningsforhold som representeter dempningen ved den forventede størrelsen på deformasjonen [8].

Tabell 3.1: Typiske dempningsforhold. Det ses at dempningsforholdet blir større når utnyttelsen økes

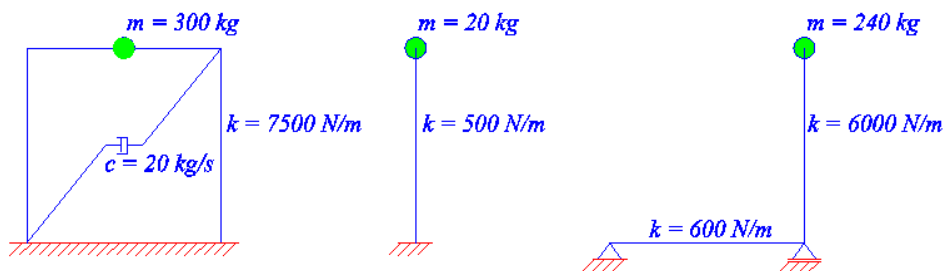
Materialutnyttelse	Materialtype	Dempningforhold
Fullstendig elastisk materiale. Maksimal spenning omkring halvparten av flytespenning	Sveiset stål	0.02 - 0.03
	Armert opprisset betong	0.03 - 0.05
	Boltet stål	0.05 - 0.07
	Boltet tre	0.05 - 0.07
Tilnærmet flytespenning	Sveiset stål	0.05 - 0.07
	Armert betong	0.07 - 0.10
	Boltet stål	0.10 - 0.15
	Boltet tre	0.10 - 0.15

Den naturlige vinkelfrekvensen til en konstruksjon er svært viktig fordi det oppstår resonans for en konstruksjon som belastes av et harmonisk eksitasjonsforløp der frekvensen tilsvarer den naturlige vinkelfrekvensen. For systemer med let dempning vil frekvensen til belastningen som gir resonans, være nesten lik den naturlige vinkelfrekvensen [8]. Dersom grunnakselerasjonen i et jordskjelv er tilnærmet periodisk, med en frekvens som er tilnærmet lik systemets vinkelfrekvens, vil det også gi svært store forskyvninger. Grunnakselerasjonen ved et jordskjelv kan ofte være tilnærmet periodisk, og det kan altså gi store belastninger for konstruksjoner med naturlig vinkelfrekvens i et visst område. Derfor er ω sentral når det skal dimensjoneres for jordskjelv, men den er ofte angitt implisitt i form av systemets naturlige svingeperiode,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (3.5)$$

Den naturlige svingeperioden, eller egensvingeperioden som T også kalles, angir tiden det tar for konstruksjonen å gjennomgå en svingning ved fri svingning.

Ligning (3.3) viser at forskyvningen $u(t)$ av et en-frihetsgradsystem kun avhenger av dempningsforholdet og den naturlige vinkelfrekvensen til systemet samt grunnakselerasjonen $\ddot{u}_g(t)$. To systemer med lik ξ og ω vil altså reagere likt på det samme jordskjelvet, uansett om de har ulik masse og stivhet. Som nevnt, kan dempningsforholdet anslås ut fra forsøk, mens systemets naturlige vinkelfrekvens (og svingeperiode) kan beregnes ut ifra massen og stivheten til systemet. Figur 3.2 viser tre konstruksjoner med like naturlige svingeperioder. Dersom de også har samme dempningsforhold, vil deres respons på et gitt jordskjelv være identiske. Som nevnt ovenfor, er det



Figur 3.2: Eksempler på konstruksjoner med like naturlige svingeperioder

nødvendig å gjøre en del forenklinger av en virkelig konstruksjon for å kunne betrakte den som et en-frihetsgradsystem, og det er viktig å være reel når det vurderes om forenklingene er forsvarlige. Det vil i mange tilfeller være nødvendig å behandle konstruksjonen som et system med flere frihetsgrader. Vi skal komme inn på hvordan slike systemer analyseres litt senere, men først tar vi en titt på hvordan den dynamiske likevektsligningen løses når belastningen stammer fra jordskjelv.

3.3 Numerisk løsning av den dynamiske likevektsligningen

Den dynamiske likevektsligningen som er gitt i ligning (3.3), kan løses analytisk dersom forløpet til belastningen, her grunnakselerasjonen, er gitt av en enkel funksjon. Det er for eksempel mulig

hvis den er konstant, harmonisk eller en impuls. I forbindelse med et jordskjelv kan grunnaksele-
rasjonens forløp generelt ikke beskrives på en måte som er egnet for analytisk løsning. Det skyldes
at belastningen er uregelmessig og ikke måles kontinuerlig, men ved diskrete tidspunkter. Derfor
må det benyttes numeriske tidsstegmetoder til å beregne forskyvningsforløpet tilnærmet. Kravene
til tidsstegmetodene er at de skal [8]

- konvergere når tidssteget reduseres
- være stabile med hensyn på avrundingsfeil
- gi løsninger som er nesten eksakte, også for relativt store tidssteg

Forløpet til grunnakseletrasjonen er ikke gitt som en kontinuerlig funksjon, men derimot som nu-
meriske data over et tidsintervall, vanligvis en måling per 0,01 eller 0,02 sekund. Det vil dermed
være opplagt å velge tilsvarende tidssteg. Forskyvningen, hastigheten og akselerasjonen er kjent
ved tidspunktet t_0 rett før jordskjelvet begynner. Ved hjelp av den numeriske metoden beregnes
forskyvnings forløp i det første tidssteget, som avsluttes ved tidspunktet t_1 . Prosedyren gjentas
så forskyvningen blir kjent frem til t_2 , dernest t_3 osv. Man går altså fra tidspunktet t_i , der for-
skyvning, hastighet og akselerasjon er kjent, til tidspunktet t_{i+1} der de er ukjente. I den prosessen
estimeres $\ddot{u}(t_{i+1})$, $\dot{u}(t_{i+1})$ og $u(t_{i+1})$ slik at de tilfredsstiller den dynamiske likevektsligningen,

$$\ddot{u}(t_{i+1}) + 2\xi\omega\dot{u}(t_{i+1}) + \omega^2 u(t_{i+1}) = \ddot{u}_g(t_{i+1})$$

Når løsningsprosessen er ferdig, er forskyvningsforløpet estimeret for hele jordskjelvet samt en
periode etterpå der systemet svinger fritt [8].

Det finnes mange numeriske tidsstegmetoder, men det er ikke relevant med en detaljert gjennom-
gang av flere av dem i denne oppgaven. Det vil derimot bli gitt en svært kort innføring i Newmarks
metode fordi den er benyttet i kapittel 5. Metoden er basert på at den relative forskyvningen og
hastigheten ved tidspunktet t_{i+1} er gitt av ligningene

$$\dot{u}(t_{i+1}) = \dot{u}(t_i) + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{u}(t_i) + (\gamma \Delta t \ddot{u}(t_{i+1})) \quad \text{og} \quad (3.6)$$

$$u(t_{i+1}) = u(t_i) + \Delta t \dot{u}(t_i) + (0,5 - \beta)(\Delta t)^2 \ddot{u}(t_i) + \beta(\Delta t)^2 \ddot{u}(t_{i+1}), \quad (3.7)$$

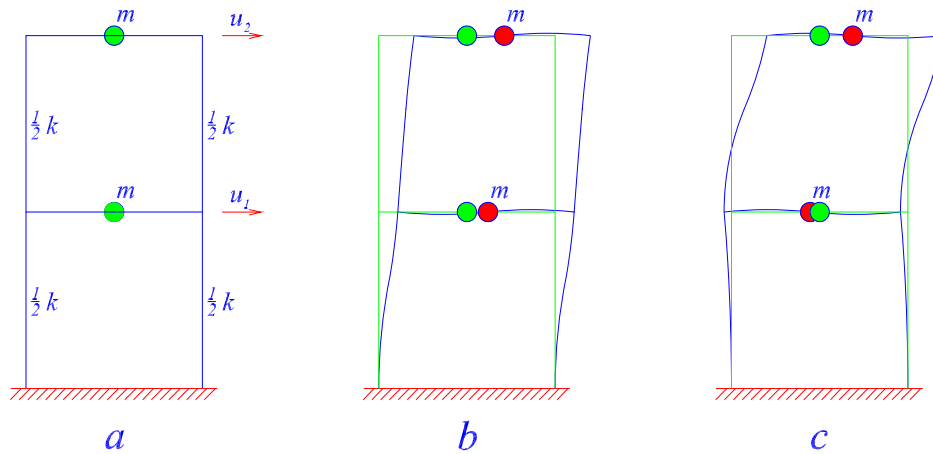
der $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ [8]. Ligningene (3.6) og (3.7) gjør det sammen med den dynamiske likevekts-
ligningen mulig å beregne forskyvningen ved tidspunktene t_i . Parametrene β og γ velges vanligvis
slik at $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$ og $\gamma = \frac{1}{2}$ [8]. Valget $\beta = \frac{1}{6}$ og $\gamma = \frac{1}{2}$ tilsvarer at grunnakseletrasjonen er li-
neært varierende mellom tidspunktene der den er kjent. På samme vis tilsvarer valget $\beta = \frac{1}{4}$ og
 $\gamma = \frac{1}{2}$ konstant gjennomsnittsakselarasjon, dvs. at den relative akselerasjonen $\ddot{u}(t)$ antas konstant
lik $\frac{1}{2}(\ddot{u}(t_{i+1}) + \ddot{u}(t_i))$ i tidsintervallet $t_i \leq t \leq t_{i+1}$.

Newmarks metode er generelt kun betinget stabil. Det vil si at det er begrenset hvor lange tidsinter-
vallene kan være. Med parametrene som tilsvarer konstant gjennomsnittsakselarasjon, er metoden
ubetinget stabil. Derfor benyttes $\beta = \frac{1}{4}$ og $\gamma = \frac{1}{2}$ ofte, spesielt i forbindelse med systemer med
mange frihetsgrader, der stabilitetskravet ellers kan gi svært korte tidssteg. Andre verdier av β og

γ gir andre fordele. For eksempel gir $\beta = \frac{1}{6}$ og $\gamma = \frac{1}{2}$ generelt mer nøyaktige resultater for et gitt tidssteg som er stabilt. Det er likevel metoden med konstant gjennomsnittsakselarasjon som benyttes mest, fordi stabilitetskriteriet ellers kan medføre at tidssteget må være så kort at beregningene blir unødvendig tidkrevende.

3.4 Generaliserte en-frihetsgradsystemer

Figur 3.2 viser eksempler på en-frihetsgradsystemer. Felles for disse er, at de har all masse plassert slik at svingeformen i forbindelse med et jordskjelv er konstant. Når forskyvningen av ett punkt i systemet er kjent, kan responsen til hele systemet beregnes. Figur 3.3 viser et system som kan



Figur 3.3: System med to frihetsgrader der massen (**m**) er samlet i punkter. Del **a** viser systemet, del **b** og **c** viser to mulige svingeformer

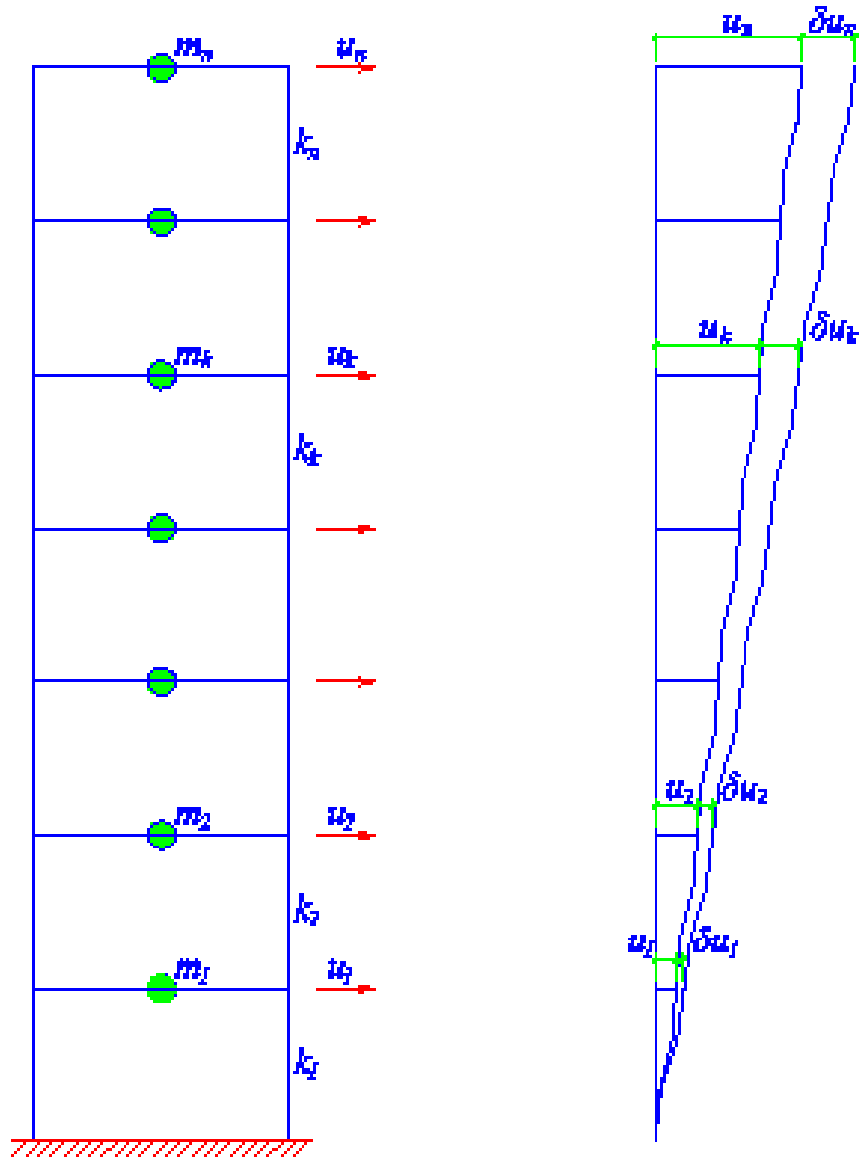
minne om et bygg med to etasjer. Dersom dette systemet utsettes for en grunnakselerasjon, vil svingeformen, og dermed forholdet $u_1(t)/u_2(t)$, ikke være konstant. Hvordan forskyvningen av systemet ser ut ved et gitt tidspunkt er avhengig av forløpet til grunnakselerasjonen samt systemets forhold mellom masse og stivhet. Systemet har to frihetsgrader, $u_1(t)$ og $u_2(t)$, og begge må være kjent for at responsen til hele konstruksjonen kan beregnes. I mange tilfeller vil svingningen være svært lik den som er vist i del b i figuren, og det kan oppnås et tilnærmet forskyvningsforløp ved å forutsette at konstruksjonen kun vil svinge i denne formen. Det gjør det mulig å beregne forskyvningsforløpet på samme vis som for et en-frihetsgradsystem. Dette kalles et generalisert en-frihetsgradsystem, og metoden kan benyttes for alle systemer. Her er den spesialisert for etasjerammer som den i figuren fordi det er denne typen systemer som er behandlet i resten av oppgaven. Siden svingeformen er antatt, er svingningen i hver etasje i fase, slik at forskyvningen kan skrives på formen

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} z(t),$$

eller mere generelt

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\psi} z(t). \quad (3.8)$$

Vektoren $\boldsymbol{\psi}$ angir den antatte forskyvningsformen, og er uavhengig av tiden. Sammen med den tidsavhengige funksjonen $z(t)$ beskriver den forskyvningsvektoren $\mathbf{u}(t)$. Basert på forskyvningsantakelsen kan det settes opp en dynamisk likevektsligning for systemet som kun har en variabel, nemlig $z(t)$. Denne likevektsligningen skal vi nå utlede for et system uten dempning siden dempning som tidligere nevnt, er en kombinasjon av mange faktorer. Et dempningsledd vil i stedet bli addert til ligningen til slutt ved bruk av dempningsforholdet ξ . Systemet den dynamiske likevektsligningen utledes for, er vist i figur 3.4. Det er forutsatt at systemet forblir elastisk, og prinsippet om virtuelt arbeid benyttes.



Figur 3.4: Skjærbygning. Massen (m_k), som er samlet i dekkets midtpunkt, forskyves u_k

Det ytre virtuelle arbeidet, δW_Y , er lik produktet av de virkelige tregghetslastene og de virtuelle forskyvningene i hver etasje [8],

$$\begin{aligned}\delta W_Y &= - \sum_{j=1}^n F_{I,j} \delta u_j \\ &= - \sum_{j=1}^n m_j \ddot{u}_j^t(t) \psi_j \delta z \\ &= - \sum_{j=1}^n m_j (\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)) \psi_j \delta z \\ &= - \sum_{j=1}^n m_j (\ddot{u}_g(t) + \psi_j \ddot{z}(t)) \psi_j \delta z.\end{aligned}$$

Det indre virtuelle arbeidet, δW_I , er lik produktet av de elastiske kreftene fra søyler og skiver i hver etasje og de relative, virtuelle forskyvningene, $\delta \Delta_j = \delta u_j - \delta u_{j-1}$ [8]. Det gir

$$\begin{aligned}\delta W_I &= \sum_{j=1}^n F_{S,j} \delta \Delta_j \\ &= \sum_{j=1}^n k_j (u_j(t) - u_{j-1}(t)) (\delta u_j - \delta u_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n k_j (\psi_j - \psi_{j-1}) z(t) (\psi_j - \psi_{j-1}) \delta z \\ &= \sum_{j=1}^n k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2 z(t) \delta z.\end{aligned}$$

Det indre virtuelle arbeidet er lik det ytre virtuelle arbeidet,

$$- \sum_{j=1}^n m_j (\ddot{u}_g(t) + \psi_j \ddot{z}(t)) \psi_j \delta z = \sum_{j=1}^n k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2 z(t) \delta z. \quad (3.9)$$

Fordi ligning (3.9) er gyldig for alle virtuelle forskyvninger får vi

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n m_j \psi_j^2 \ddot{z}(t) + \sum_{j=1}^n k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2 z(t) &= - \sum_{j=1}^n m_j \psi_j \ddot{u}_g(t) \quad \Leftrightarrow \\ \tilde{m} \ddot{z}(t) + \tilde{k} z(t) &= \tilde{L} \ddot{u}_g(t), \quad \text{der} \\ \tilde{m} = \sum_{j=1}^n m_j \psi_j^2, \quad \tilde{k} = \sum_{j=1}^n k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2 \quad \text{og} \quad \tilde{L} &= - \sum_{j=1}^n m_j \psi_j.\end{aligned}$$

Ved å dele på den generaliserte massen, \tilde{m} , og innføre et dempningsledd, finner vi den dynamiske likevektsligningen for det generaliserte en-frihetsgradsystemet:

$$\ddot{z}(t) + 2\xi \omega_1 \dot{z}(t) + \omega_1^2 z(t) = - \frac{\tilde{L}}{\tilde{m}} \ddot{u}_g(t). \quad (3.10)$$

Den naturlige vinkelfrekvensen betegnes ω_1 i stedet for ω fordi det til ethvert system finnes like mange naturlige vinkelfrekvenser som det finnes frihetsgrader. I neste avsnitt kommer vi inn på hvordan alle disse kan beregnes. Inntil videre skal vi ikke bry oss om forskjellen på ω_1 , som brukes for et generalisert en-frihetsgradsystem, og ω som benyttes for systemer med kun en frihetsgrad. Den naturlige vinkelfrekvensen i ligning (3.10) er kun en tilnærming til konstruksjonens virkelige naturlige vinkelfrekvens fordi systemet er blitt “tvunget” til å deformere seg i formen som er gitt av ψ . Den får altså ikke deformere seg fritt. Dermed er det indirekte tilført stivhet til systemet, hvilket medfører at ω_1 i ligning (3.10) er større enn den virkelige naturlige vinkelfrekvensen. Størrelsen på forskjellen avhenger av hvor god en tilnærming ψ er til den virkelige forskyvningsformen, og det er ikke umiddelbart logisk hva som er en bra forskyvningsantakelse. Rayleighs metode gir en løsning på dette problemet. For et system som ikke er dempet, medfører prinsippet om energibevarelse at maksimal tøyingsenergi må være lik maksimal bevegelsesenergi [8],

$$E_S = E_K. \quad (3.11)$$

Ved å sette inn en forskyvningsantakelse i ligning (3.11) finnes en tilnærming til den naturlige vinkelfrekvensen, og siden tilnærmelsen aldri vil bli mindre enn den virkelige verdien, er det mulig å finne en bra tilnærming ved å prøve flere og velge den som gir minst ω_1 . Dersom det som formfunksjon benyttes den resulterende forskyvningen av et sett statiske laster, vil denne overholde de kinematiske og mekaniske randbetingelsene. Som statiske laster, velges ofte punktmassenes vekt påført horisontalt i den pågjeldende punktmassen. For en bygning med flere etasjer, vil lastene på hver etasje dermed tilsvare massen i etasjen, m_j , multiplisert med tyngdeakselerasjonen, g . Den maksimale tøyingsenergien kan beregnes som arbeidet, utført av de statiske kreftene når de produserer forskyvningene, som er grunnlaget for formfunksjonen [8, 9]. Det vil si at

$$E_S = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j g u_{j,max} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j g \psi_j z_{max}. \quad (3.12)$$

Den maksimale kinetiske energien beregnes fra formfunksjonen som er gitt av den statiske deformasjonen, $u_{maks} = \psi z_{max}$:

$$E_K = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \dot{u}_{j,max}^2 \quad (3.13)$$

Siden $z(t)$ er en harmonisk funksjon, er $\dot{u}_{j,max}^2 = (u_{j,max} \omega_1)^2$. Det settes inn i ligning (3.13):

$$E_K = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j u_{j,max}^2 \omega_1^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \psi_j^2 z_{max}^2 \omega_1^2. \quad (3.14)$$

Ved å sette ligning (3.12) og (3.14) inn i ligning (3.11) får vi

$$\omega_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j g \psi_j z_{max}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \psi_j^2 z_{max}^2} = g \frac{\sum_{j=1}^n m_j \psi_j}{\sum_{j=1}^n m_j \psi_j^2}. \quad (3.15)$$

Metoden med generaliserte en-frihetsgradsystemer benyttes ofte til å anslå lastvirkningene fra jordskjelv, men uttrykket for den naturlige vinkelfrekvensen i ligning (3.15) forenkeles av norske regelverk. Det ser vi nærmere på i kapittel 9.

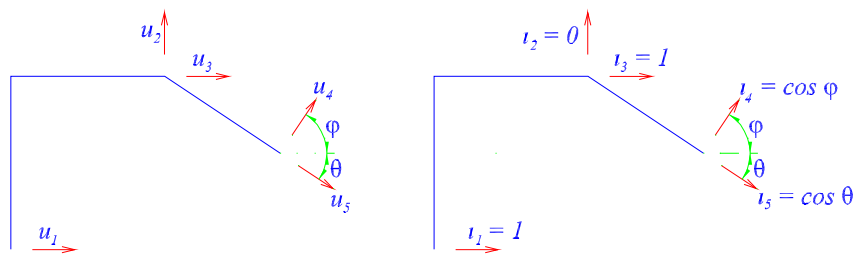
3.5 Systemer med flere frihetsgrader

Ikke alle konstruksjoner kan beskrives tilfredsstillende nøyaktig som generaliserte en-frihetsgrad-systemer. Gjeldende regelverk for prosjektering av bygg i Norge setter strenge krav til bygningens geometri, for at den kan generaliseres til et system med kun en frihetsgrad. Hvis kravene ikke innfris, må det benyttes metoder som tar hensyn til flere svingeformer [39, 42]. Den dynamiske likevektsligningen for et klassisk dempet, lineært elastisk system med n frihetsgrader utsatt for jordskjelv finnes ved likevektsbetraktning. Resultatet er [8]:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{k} \mathbf{u}(t) = -\mathbf{m} \boldsymbol{\iota} \ddot{u}_g(t), \quad (3.16)$$

der \mathbf{m} er massematrisen, \mathbf{c} dempningsmatrisen, \mathbf{k} stivhetsmatrisen, $\mathbf{u}(t)$ løsningsvektoren og $-\mathbf{m} \boldsymbol{\iota} \ddot{u}_g(t)$ lastvektoren. Massematrisen er diagonal hvis massen er samlet i diskrete punkter med translasjonsfrihetsgrader, men dempningsmatrisen og stivhetsmatrisen er generelt ikke diagonale. Derfor vil det kreve løsning av n koblede ligninger å finne løsningsvektoren.

Lastvektoren $-\mathbf{m} \boldsymbol{\iota} \ddot{u}_g(t)$ finnes fra D'Alemberts prinsipp. Innflytelsesvektoren for lasten på systemet, $\boldsymbol{\iota}$, forklares ved hjelp av figur 3.5. Når grunnakselerasjonen virker i en gitt retning, f.eks. x -retning, vil alle frihetsgrader i denne retningen ha en total akselerasjon lik summen av grunnakselerasjonen og den relative akselerasjonen av frihetsgraden, $\ddot{u}_j^t(t) = \ddot{u}_j(t) + \ddot{u}_g(t)$. I det tilfellet er $\iota_j = 1$. Dersom en frihetsgrad derimot ikke er definert i samme retning som grunnakselerasjonen virker, men i en vinkel θ med denne, vil $\ddot{u}_j^t(t) = \cos \theta (\ddot{u}_j(t) + \ddot{u}_g(t))$, så $\iota_j = \cos \theta$ [8]. Det er illustrert i figur 3.5. I denne oppgaven behandles mange konstruksjoner som kan forenkles til systemer uten vertikale frihetsgrader. For de situasjonene der alle disse frihetsgradene er definert i samme retning som grunnakselerasjonen, blir innflytelsesvektoren for lasten en vektor som kun inneholder ettall. Det vil for eksempel være tilfellet for skjærbygningen i figur 3.4. Hele systemets masse er samlet i punkter som alle beveger seg langs samme akse. Retningen de følger er horisontal, og konstruksjonen må kontrolleres for jordskjelv som virker i nettopp den retningen. Bygget er dobbeltsymmetrisk, så det må også kontrolleres for grunnakselerasjon i hovedretningen vinkelrett på den som er betraktet i figuren.



Figur 3.5: Innflytelsesvektoren $\boldsymbol{\iota}$ fremkommer ved geometriske betraktninger

I det følgende gjennomgås utledningen av den modale analysen som omdanner ligningssystemet i (3.16) til et system av ukoblede ligninger. Dermed reduseres beregningstiden betraktelig. Metoden kan benyttes for alle lineært elastiske konstruksjoner. Den bygger på svingeformene som systemet inntar ved fri svingning. For et lineært elastisk, udempet system med mer enn en frihetsgrad finnes

den dynamiske likevekstligningen for fri svingning ved å sette $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ og $\ddot{u}_g(t) = 0$ i ligning (3.16). Resultatet er

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{k} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}. \quad (3.17)$$

De naturlige svingeformene til systemet har følgende egenskaper:

1. Ved fri svingning i en egensvingeform vil forskyvningen av frihetsgradene variere likt med tiden, svingeformen er altså konstant
2. Uansett forløpet til lastvektoren kan forskyvningen av frihetsgradene til enhver tid beskrives som en lineær kombinasjon av svingeformene

For systemet i ligning (3.17) gir det

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k(t) = \sum_{k=1}^n \phi_k q_k(t) = \Phi \mathbf{q}(t), \quad (3.18)$$

der n er antallet frihetsgrader, ϕ_k er egensvingeformene og $q_k(t)$ er tidsavhengige vektall som angir størrelsen på bidraget fra svingeform k til forskyvningsvektoren $\mathbf{u}(t)$. Matrisen Φ består av vektorene ϕ_k , og vektoren $\mathbf{q}(t)$ består av funksjonene $q_k(t)$. Hver forskyvningsfunksjon $u_k(t)$ må oppfylle ligning (3.17) fordi det er mulig at $q_j(t) = 0$ for alle $j \neq k$. Dette kravet medfører at

$$\mathbf{m} \phi_k \ddot{q}_k(t) + \mathbf{k} \phi_k q_k(t) = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

Løsningen på differensialligningen i (3.19) gir den tidsavhengige funksjonen $q_k(t)$ som en sinusbølge, dvs. $\ddot{q}_k(t) = -\omega_k^2 q_k(t)$. Dersom amplituden til $q_k(t)$ er lik null, er løsningen triviell og derfor uinteressant. Ikke-triviell løsning gir derimot

$$\omega_k^2 \mathbf{m} \phi_k = \mathbf{k} \phi_k, \quad (3.20)$$

som leder til

$$(\mathbf{k} - \omega_k^2 \mathbf{m}) \phi_k = \mathbf{0}. \quad (3.21)$$

Løsningen $\phi_k = \mathbf{0}$ er triviell og derfor uinteressant. Ikke-triviell løsning krever at

$$\det(\mathbf{k} - \omega_k^2 \mathbf{m}) = 0. \quad (3.22)$$

For et system med n frihetsgrader gir det n løsninger for ω . Disse benevnes etter størrelse slik at

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_k \leq \dots \leq \omega_n. \quad (3.23)$$

Ved å sette inn ω_k i en av ligningene i (3.21) finnes vektoren som beskriver den korresponderende egensvingeformen, ϕ_k . Her ser vi at en vilkårlig konstant multiplisert med en egensvingeform også er en egensvingeform som hører til samme ω_k . Størrelsen på hver ϕ_k kan altså ikke bestemmes, kun formen. Egensvingeformene skaleres ofte så alle de betraktete svingeformene har komponenter i samme størrelsesorden. De kan f.eks skaleres slik at de har samme komponent i en gitt frihetsgrad. For et bygg med flere etasjer kan det således være aktuelt å sette forskyvningen av den øverste etasje lik en i alle de naturlige svingeformene.

Modene er ortogonale, hvilket betyr at

$$\phi_i^T \mathbf{m} \phi_j = 0 \quad \text{og} \quad \phi_i^T \mathbf{k} \phi_j = 0, \quad \text{der} \quad i \neq j. \quad (3.24)$$

Det kreves i punkt 2 under ligning (3.17). For tilfellet der $\omega_i \neq \omega_j$ er beviset for dette er relativt enkelt og gitt i [8], men ligning (3.24) er gyldig også for $\omega_i = \omega_j$. Egensvingeformenes ortogonalitet gjør det mulig å løse den dynamiske likevektsligningen til et dempet, lineært elastisk system med n frihetsgrader uten å måtte løse koblete ligninger. Den dynamiske likevektsligningen til et slikt system er gitt i ligning (3.16). Dersom ligning (3.18) innsettes fremkommer sammenhengen

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{c} \Phi \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{k} \Phi \mathbf{q}(t) &= -\mathbf{m} \boldsymbol{\iota} \ddot{u}_g(t) \quad \Leftrightarrow \\ \Phi^T \mathbf{m} \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T \mathbf{c} \Phi \dot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T \mathbf{k} \Phi \mathbf{q}(t) &= -\Phi^T \mathbf{m} \boldsymbol{\iota} \ddot{u}_g(t) \quad \Leftrightarrow \\ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) &= -\Phi^T \mathbf{m} \boldsymbol{\iota} \ddot{u}_g(t), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\text{der} \quad \mathbf{M} = \Phi^T \mathbf{m} \Phi \quad \mathbf{C} = \Phi^T \mathbf{c} \Phi \quad \mathbf{K} = \Phi^T \mathbf{k} \Phi. \quad (3.26)$$

Matrisene \mathbf{M} og \mathbf{K} kalles henholdsvis modal massematrise og modal stivhetsmatrise. De er diagonale fordi modene er ortogonale, og leddene på diagonalen er lik $M_k = \phi_k^T \mathbf{m} \phi_k$ og $K_k = \phi_k^T \mathbf{k} \phi_k$. Den modale dempningsmatrisen \mathbf{C} er diagonal hvis systemet er klassisk dempet, hvilket vanligvis antas siden det uansett er mye usikkerhet knyttet til dempning. Systemet av n koblete ligninger i (3.16) er altså redusert til et system av n ukoblete ligninger i (3.26).

Det er som tidligere nevnt, vanlig å skalere svingeformene så de er i samme størrelsesorden. I forbindelse med beregninger på datamaskin skaleres modene ofte slik at $M_k = 1$, og det medfører at $K_k = \omega_k^2$ fordi ligning (3.26) og (3.20) gir

$$K_k = \phi_k^T \mathbf{k} \phi_k = \phi_k^T (\omega_k^2 \mathbf{m} \phi_k) = \omega_k^2 M_k.$$

I forbindelse med et jordskjelv er grunnakselerasjonen så uregelmessig, at responsen må beregnes ved hjelp av numeriske metoder. Det lønner seg likevel å finne modene til systemet og dele det opp i ukoblete ligninger som løses numerisk av flere årsaker. For det første går det vesentlig hurtigere å løse ukoblete ligninger enn koblete, og selv om dataprogrammer stadig utvikles og forbedres, tar det fortsatt lang tid å løse et system av titalls koblete ligninger [8]. Samtidig kan responsen til et system vanligvis beskrives tilfredsstillende med kun den første brøkdelen av det totale antallet moder. Denne viktige sammenhengen, som forklares i avsnitt 6.5, medfører at modal analyse kan redusere løsningskravet fra et system av n koblete ligninger til j ukoblete ligninger, der j er antallet moder med praktisk relevans for systemets respons. Modal analyse har likevel noen svakheter. For det første forutsettes klassisk dempning, altså at matrisen $\mathbf{C} = \Phi^T \mathbf{c} \Phi$ er diagonal. Systemer som består av deler med svært ulik dempning, er et eksempel på en situasjon der klassisk dempning ikke er realistisk. En bygning som er utført i armert betong i de nederste etasjene og sveiset stål i de øverste, vil kunne betraktes som klassisk dempet fordi dempningsforholdene for de to materialene er tilnærmet like, se tabell 3.1. En konstruksjon som står på relativt myke masser, og er utført slik at interaksjonen mellom grunn og konstruksjon er viktig, vil derimot ikke kunne betraktes som klassisk dempet. Grunnen kan ha et dempningsforhold på 0.20 mens bygget typisk

har $\xi = 0.05$. Det er ikke mulig å kombinere så forskjellige dempningsforhold til en klassisk dempningsmatrise [8]. Konstruksjonene som denne oppgaven omhandler, kan vanligvis betraktes som klassisk dempede, slik at denne forutsetningen ikke er utslagsgivende for muligheten til å benytte modal analyse. I tilfeller der samvirke mellom grunn og fundamenter er avgjørende, vil den ekstra dempningen i jorden være gunstiv og det er derfor konservativt å se bort fra den. Viktigere er det derimot at systemet må være lineært elastisk for at modene blir ukoblede fordi utledningen av metoden bygger på ligning (3.17), der $F_S = \mathbf{k}\mathbf{u}(t)$. Kapasiteten til en konstruksjon som tillates plastiske deformasjoner, er vesentlig større enn kapasiteten til den samme konstruksjonen hvis den skal forbli elastisk. Denne tilleggskapasiteten utnyttes vanligvis når bygg dimensjoneres, og det er derfor mer regelen enn unntaket at forutsetningen om lineær elastisitet ikke er oppfylt. Det betyr at de modale likevektsligningene ikke blir ukoblede. I avsnitt 6.8 vises det at koblingen av ligningene som konsekvens av plastiske forskyvninger, er så svak at den vanligvis kan neglisjeres.

Det er generelt gunstig å benytte modal analyse i stedet for å basere beregningene på et generalisert en-frihetsgradsystem [15]. For det første gir en modal analyse en mer jevn fordeling av spenningene i de mest påkjente snittene, for eksempel i hver ende av en bjelke. En stålbjelke som skal dimensjoneres for varierende spenninger langs tverrsnittet, vil vanligvis prosjekteres til å tåle sin maksimale påkjenning langs hele bjelken. Tre- og stålbjelker har svært sjelden varierende tverrsnitt siden det er dyrt å produsere. Hvis materialet derimot er betong, vil det være mulig å foreskrive mindre armering i snittene der bjelken er mindre belastet, men tverrsnittet vil også her vanligvis være konstant og minimumsarmeringen vil derfor slå inn. Det gir altså en besparelse med tanke på materialbruk hvis spenningene er jevnt fordelt over hver komponent i konstruksjonen. Den andre grunnen til at tredimensjonal modal analyse anbefales, er at det gir bedre yteevne i inelastiske situasjoner. Årsaken er sannsynligvis bedre beskrivelse av de maksimale deformasjonene ved inelastisk respons, selv om den modale analysen prinsipielt kun er gyldig for lineært elastiske konstruksjoner [15].

3.6 Respons til flerfrihetsgradsystem utsatt for jordskjelv

I avsnitt 3.5 så vi på lineært elastiske flerfrihetsgradsystemer, og den modale analysen ble introdusert. I det følgende benyttes modal analyse på et klassisk dempet, lineært elastisk system med n frihetsgrader som utsettes for jordskjelv. Resultatet viser viktige sammenhenger mellom grunnakselersasjon og respons.

Ved et jordskjelv vil systemet forskyve seg i henhold til ligning (3.25). For mode k gir det

$$M_k \ddot{q}_k(t) + C_k \dot{q}_k(t) + K_k q_k(t) = -L_k \ddot{u}_g(t), \quad (3.27)$$

der

$$M_k = \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_k, \quad C_k = \boldsymbol{\Phi}_k^T \mathbf{c} \boldsymbol{\Phi}_k, \quad K_k = \boldsymbol{\Phi}_k^T \mathbf{k} \boldsymbol{\Phi}_k \quad \text{og} \quad L_k = \boldsymbol{\Phi}_k^T \mathbf{m} \boldsymbol{\iota}. \quad (3.28)$$

Ved å dele på M_k i ligning (3.27) oppnås

$$\ddot{q}_k(t) + 2\omega_k \xi_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = -\frac{L_k}{M_k} \ddot{u}_g(t), \quad (3.29)$$

der

$$\xi_k = \frac{C_k}{2 M_k \omega_k} \quad \text{og} \quad \omega_k = \sqrt{\frac{K_k}{M_k}}.$$

Dempningsforholdet er vanligvis det samme for alle svingeformene, slik at ξ_k kan erstattes av ξ i ligning (3.29) [8].

Når responsen til en mode skal finnes, benyttes det tilsvarende en-frihetsgradsystemet med enhetsmasse [8]. Det har følgende dynamiske likevektslikning:

$$\ddot{D}_k(t) + 2 \omega_k \xi \dot{D}_k(t) + \omega_k^2 D_k(t) = -\ddot{u}_g(t).$$

Den tidsavhengige funksjonen, $q_k(t)$, i ligning (3.29) er dermed gitt som

$$q_k(t) = \frac{L_k}{M_k} D_k(t). \quad (3.30)$$

Ved å sette ligning (3.30) inn i uttrykket for forskyvningen i ligning (3.18) fås

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k(t) = \sum_{k=1}^n \phi_k q_k(t) = \sum_{k=1}^n \frac{L_k}{M_k} \phi_k D_k(t). \quad (3.31)$$

De statiske lastene som ville resultert i den samme forskyvningen, kalles tilsvarende statiske laster og vil her bli betegnet \mathbf{F} . De finnes ved å se bort fra de dynamiske bidragene i ligning (3.16) og samtidig kreve at forskyvningen forblir som gitt i ligning (3.31). Det gir

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k(t),$$

der \mathbf{F}_k er bidraget fra mode k ,

$$\mathbf{F}_k(t) = \mathbf{k} \mathbf{u}_k(t) = \mathbf{k} \phi_k q_k(t).$$

Ligning (3.20) innsettes:

$$\mathbf{F}_k(t) = \omega_k^2 \mathbf{m} \phi_k q_k(t)$$

Nå benytter vi ligning (3.30):

$$\mathbf{F}_k(t) = \omega_k^2 \frac{L_k}{M_k} \mathbf{m} \phi_k D_k(t) = \mathbf{s}_k \omega_k^2 D_k(t) \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{s}_k \omega_k^2 D_k(t). \quad (3.32)$$

Vektoren $\mathbf{s}_k = \frac{L_k}{M_k} \mathbf{m} \phi_k$ er bidraget fra mode k til lastvektoren $\mathbf{m} \boldsymbol{\iota}$, dvs. [8]

$$\mathbf{m} \boldsymbol{\iota} = \sum_{k=1}^n \mathbf{s}_k = \sum_{k=1}^n \frac{L_k}{M_k} \mathbf{m} \phi_k. \quad (3.33)$$

Et systems respons til et gitt jordskjelv, $r(t)$, er knyttet til responsen som oppnås ved statisk påføring av "lastene" s_k . Ordet "lastene" settes i anførselstegn fordi de har feil dimensjoner. Først når de multipliseres med akselerasjon fremkommer en kraft. En statisk analyse der s_k behandles som krefter, vil gi korrekt respons når resultatet, det være seg skjærkraft, moment, spenning eller forskyvning i et gitt punkt, multipliseres med pseudoakselerasjonen $\omega_k^2 D_k(t)$ ¹. Alle typer respons er altså gitt av kombinasjonen av en rent statisk løsning og en dynamisk løsning:

$$r(t) = \sum_{k=1}^n r_k(t) = \sum_{k=1}^n r_k^{st} \omega_k^2 D_k(t), \quad (3.34)$$

der r_k^{st} er responsen som oppnås ved statisk påføring av "lastene" s_k , og n er antallet frihetsgrader. Dersom det f.eks. er interessant å finne skjærkraft, moment og forskyvning i et gitt punkt, gir ligning (3.34)

$$V(t) = \sum_{k=1}^n V_k^{st} \omega_k^2 D_k(t), \quad M(t) = \sum_{k=1}^n M_k^{st} \omega_k^2 D_k(t), \quad \text{og} \quad u(t) = \sum_{k=1}^n u_k^{st} \omega_k^2 D_k(t). \quad (3.35)$$

Denne metoden kalles tidshistorieanalyse. Responsen som finnes fra ligning (3.34), er eksakt for det betrakte jordskjelvet når det ses bort fra de numeriske feilene som oppstår ved bruk av tidsstegmetoder og datamaskiner. Det er vanligvis mest interessant å finne den maksimale responsen. Her er det viktig å merke seg, at maksimal skjærkraft ikke opptrer samtidig som maksimalt moment eller forskyvning. Årsaken til det er at det innbyrdes forholdet mellom modenes bidrag, $\frac{r_i}{r_j}$, ikke er likt for forskjellige typer respons. F.eks. er $M_1^{st}/M_2^{st} \neq V_1^{st}/V_2^{st}$ i ligning (3.35) [8].

For at uttrykket for skjærkraft i ligning (3.35) skal få korrekt benevnelse, må V_k^{st} være en masse. Den massen som for en gitt egensvingeform gir den totale skjærkraften ved konstruksjonens fundament i samme retning som grunnakselerasjonen virker, kalles den effektive modale massen til den moden [8]. For mode k betegnes den effektive modale massen m_k . Vi har tidligere kalt massen i frihetsgrad k for m_k , se f.eks. ligning (3.15). Den effektive modale massen til mode k og massen i frihetsgrad k har så forskjellige bruksområder at dette ikke vil føre til problemer i det videre. Den effektive modale massen er altså gitt av uttrykket

$$m_k = V_{k,b}^{st}, \quad (3.36)$$

der $V_{k,b}^{st}$ er skjærkraft ved fundamentnivå i den retningen grunnakselerasjonen virker når systemet er belastet av "lastene" $s_k = \frac{L_k}{M_k} \mathbf{m} \phi_k$. Denne vil være lik den transformerte av innflytelsesvektoren, $\boldsymbol{\iota}^T$, multiplisert med s_k . Det følger av definisjonen av $\boldsymbol{\iota}$, se diskusjonen ved figur 3.5. Altså er

$$m_k = \boldsymbol{\iota}^T s_k = \boldsymbol{\iota}^T \frac{L_k}{M_k} \mathbf{m} \phi_k. \quad (3.37)$$

Det betyr at summen av de effektive modale masserne er

$$\sum_{k=1}^n m_k = \boldsymbol{\iota}^T \sum_{k=1}^n s_k = \boldsymbol{\iota}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\iota}, \quad (3.38)$$

¹ Vi blir bedre kjent med begrepet pseudoakselerasjon i kapittel 5.

der ligning (3.33) er benyttet i den siste overgangen. Den høyre siden av ligning (3.38) er lik den totale massen i systemet. Det forklares på ved hjelp av figur 3.5, der det for enkelthets skyld antas at frihetsgradene i hver node er definert vinkelrett på hverandre. For en todimensjonal modell er massen i et gitt knutepunkt k komponenten i rad og kolonne i og j i massematrisen, dvs.

$$m_k^{\odot} = m_{ii} = m_{jj}.$$

Notasjonen m_k^{\odot} er benyttet for å unngå en forveksling mellom massen i knutepunkt k og den effektive modale massen til svingeform k . Komponentene i rad i i innflytelsesvektoren vil være lik $\cos \theta$ og komponenten i rad j lik $\sin \theta$, der θ er vinkelen mellom frihetsgrad i og retningen grunnakselerasjonen virker i. Dermed blir bidragene fra rad i og j til høyre side av ligning (3.38) lik $m_{ii} \cos^2 \theta + m_{jj} \sin^2 \theta = m_k^{\odot}$. Slik blir massen i hvert knutepunkt representert i summen av de effektive modale massene, og resultatet er det samme hvis frihetsgradene i hver node ikke er definert vinkelrett på hverandre.

Det at summen av de effektive modale massene er lik konstruksjonens totale masse, benyttes i stor utstrekning innenfor prosjektering. Som vi skal se i avsnitt 6.5, har det seg nemlig slik at innflytelsen til de første modene er større enn innflytelsen til de siste. Systemene som har vært brukt som eksempler hittil, har svært få frihetsgrader, og det er derfor ikke aktuelt å se bort fra noen av modene. For virkelige konstruksjoner som skal dimensjoneres for jordskjelv, er det derimot vanlig med hundrevis av frihetsgrader. Da er det nyttig å kunne se bort fra de med forsvinnende liten effektiv modal masse, og dermed også svært lite bidrag til den totale responsen. I NS 3491-12 og NS-EN 1998-1 kreves det at det som minimum medtas nok moder til at summen av de effektive modale massene er større enn 90 % av den totale massen til konstruksjonen, eller at det ikke neglisjeres noen moder som har større effektiv modal masse enn 5 % av konstruksjonens totale masse. Det er dog viktig å huske på at en mode som gir liten skjærkraft ved terreng, og derfor har liten effektiv modal masse, kan være avgjørende for andre responsparametre som f.eks. aksiallasten i en gitt søyle.

I tillegg til de praktiske egenskapene vi har utledt for de effektive modale massene, gjør de det enkelt å forstå den modale analysen. Skjærkraften ved grunnnivå fra mode k er ifølge ligning (3.36) og (3.35) lik

$$V_b(t) = m_k \omega_k^2 D_k(t). \quad (3.39)$$

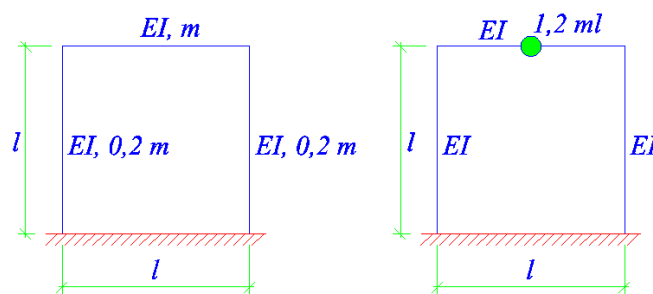
Dette er skjærkraften til et system med en frihetsgrad hvis masse tilsvarer den effektive modale massen m_k , naturlig vinkelfrekvens ω_k^2 og dempningsforhold ξ_k . Den effektive modale massen kan altså forstås som massen til en-frihetsgradsystemet med skjærkraftforløp tilsvarende det til den aktuelle moden.

3.7 Forenkling av konstruksjonen

I dette kapitlet har det hittil vært forutsatt at en konstruksjons masse- og stivhetsmatrise samt dempningsforhold er kjent, men disse avhenger av hvilke forenklinger som ligger til grunn for den matematiske modellen. Beregninger av kreftene som oppstår i forbindelse med et jordskjelv, blir ofte omfattende. Det er derfor nødvendig å forenkle konstruksjonen betraktelig for å redusere

beregningstiden. Samtidig vil for stor forskjell mellom den virkelige og forenklede konstruksjonen medføre upålitelige resultater.

En svært vanlig forenkling er å betrakte massen som samlet i diskrete punkter [8]. Massen er egentlig fordelt utover konstruksjonen, men dersom den antas samlet i et endelig antall punkter med translasjonsfrihetsgrader blir massematriksen diagonal. Årsaken er, at treghetskraftene virker der det er masse. Hvis massen er samlet i punkter (uten fysisk utbredelse), der det er definert dynamiske frihetsgrader, vil treghetskraftene altså ikke være koblete. Vi utnyttet dette i diskusjonen ved figur 3.1. Massen i en bygning er vanligvis samlet i dekkene. Derfor trengs det relativt få punktmasser for at resultatene skal bli tilfredsstillende nøyaktige. I et jordskjelv vil dekkene ha en mye større horisontal enn vertikal forskyvningskomponent, og grunnet dekkenes stivhet vil det generelt være tilstrekkelig nøyaktig å betrakte massen som samlet i svært få punkter per etasje. Dette er illustrert i figur 3.6 som viser en ramme bestående av to søyler og en bjelke. Stivheten i alle komponentene er lik, men massen i bjelken er 5 ganger større enn i hver av søylene. Den første egenfrekvensen til systemet, ω_1 , ble beregnet ved hjelp av elementmetoden, der hver konstruksjonsdel ble modellert av ett bjelkeelement. Det er sett bort fra andre ordens effekter, se avsnitt 3.8. Forskjellen mellom resultatene for ω_1 beregnet med massen fordelt over systemet og med massen samlet i ett punkt i bjelken som ikke opplever vertikal forskyvning (dvs. midten eller en av endene), avviker kun med fire prosent.

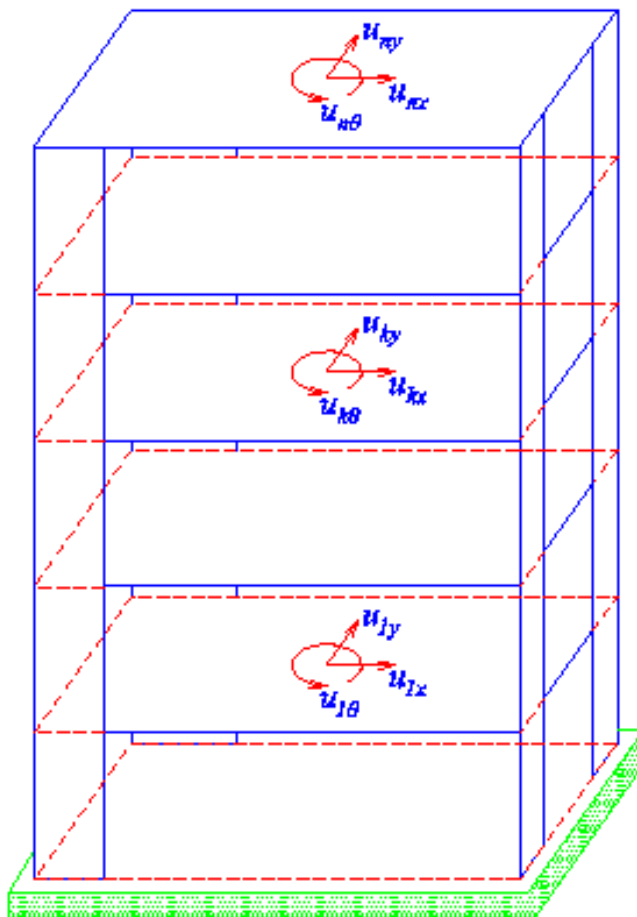


Figur 3.6: Ramme der alle komponenter har samme stivhet mens massen på dem varierer. Til venstre ses den virkelige rammen, til høyre ses en forenklet modell. Ved beregning av den første naturlige vinkelfrekvensen til de to systemene ble avviket mellom resultatene på bare 4 %

Bidragene fra rotasjonsfrihetsgradene til massematriksen er vanligvis neglisjerbare. Det medfører at de kan kondenseres bort ved statisk kondensering. Det gir en reduksjon i antallet ligninger som må løses for å finne de naturlige svingeformene. Samtidig medfører den statiske kondenseringen at stivhetsmatriksen blir full. Derfor er reduksjonen av beregningstiden begrenset [8].

I konstruksjoner der massesenteret ikke ligger samme sted som stivhetsenteret, vil modene inneholde torsjonsbidrag. Det betyr at en konstruksjon som utsettes for grunnakselerasjon i en hovedretning, for eksempel x -retning, også vil få deformasjoner i retningen vinkelrett på grunnakselerasjonen, altså y -retningen. Dermed kan konstruksjonens respons ikke beregnes ved hjelp av to atskilte, todimensjonale systemer, et for hver horisontalretning. Slike systemer blir i dag stort sett utelukkende analysert ved hjelp av elementmetoden. Her deles konstruksjonen inn i elementer med frihetsgrader i hver node. Vanligvis vil konstruksjonen bestå av bjelke-, stav-, membran- og skall-

elementer. De sistnevnte benyttes til å modellere dekkene som er tilnærmet uendelig stive i sine egne plan. I avsnitt 8.3 argumenterer vi for at den vertikale komponenten til grunnakselerasjonen vanligvis er neglisjerbar. Det betyr at alle horisontale forskyvninger av et dekke vil kunne beskrives tilfredsstillende med to translasjoner og en rotasjon, se figur 3.7. Dermed reduseres antallet frihetsgrader i et fleretasjesbygg betraktelig [8].



Figur 3.7: Den horisontale forskyvningen av hver etasje kan beskrives ved hjelp av tre komponenter. Det trengs flere frihetsgrader for å beskrive de vertikale forskyvningene, men figuren viser kun de horisontale frihetsgradene av hensyn til overskueligheten

Størrelsen på elementene som benyttes i analysen av systemet, har innflytelse på resultatene som oppnås. Når systemet deles inn i elementer, omdannes det fra et system med uendelig mange frihetsgrader til et med endelig mange frihetsgrader, med like mange moder som det er frihetsgrader. Det er vanligvis kun den første halvparten av vinkelfrekvensene og egensvingeformene som er tilfredsstillende lik den virkelige konstruksjonen sine, og det taler for en viss forfining av elementnettet [10]. Samtidig er det for systemer med mange frihetsgrader kun behov for den første brøkdelen av modene for å oppnå tilfredsstillende resultater for responsen, så i praksis kan et relativt grovt elementnett benyttes. I avanserte beregningsprogrammer er det mulig å bruke vesentlig færre elementer til å bestemme jordskjevbelastningen på en konstruksjon enn det deretter

benyttes til å beregne konstruksjonens respons i form av spenninger og tøyninger [8].

3.8 Andre ordens effekter

Aksiallast påvirker en konstruksjons stivhet. Strekk stiver opp konstruksjonen slik at den tåler en større forskyvning vinkelrett på aksiallasten, mens trykk medvirker til å øke forskyvningen og kan medføre knekning. Konstruksjonene som betraktes i denne oppgaven, er generelt utsatt for trykk i sine vertikale komponenter fordi vekten av massene m_k gir vertikallasten $m_k g$, der g er tyngdeakselerasjonen. Vertikallasten fordeles mellom de vertikale bærende konstruksjonsdelene, der de opptas som aksialspenninger. Siden trykk er langt vanligere enn strekk i denne problemstillingen, vil trykk i denne sammenhengen beregnes som positiv. En positiv vertikallast gir opphav til et moment som bidrar til å øke forskyvningen vinkelrett på aksiallasten. Dvs. at den kan gi en kraftkomponent i horisontalretningen som må medtas i den dynamiske likevektsligningen. Dette kalles geometriske effekter, og den horisontale kraften benevnes F_G . Størrelsen på denne er tilnærmet direkte proporsjonal med forskyvningen og størrelsen på aksiallasten, og kan skrives som

$$F_G(t) = k_G u(t),$$

der k_G er den geometriske stivheten [4, 9]. Den dynamiske likevektsligningen som inkluderer geometriske effekter, ser slik ut [9]:

$$\begin{aligned} m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) - k_G u(t) &= -m \ddot{u}_g(t) \quad \Leftrightarrow \\ m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + \bar{k} u(t) &= -m \ddot{u}_g(t), \quad \text{der} \end{aligned}$$

$$\bar{k} = k - k_G \tag{3.40}$$

er den kombinerte stivhetsmatrisen til systemet. Når det tas hensyn til andre ordens effekter blir

$$\omega = \sqrt{\frac{\bar{k}}{m}}, \quad \text{og} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{m\bar{k}}}.$$

Siden den kombinerte stivheten, \bar{k} , ved trykkbelastning er mindre enn k , vil de geometriske effektene i tilfellene med trykk medføre en forlengelse av den naturlige svingeperioden $T = 2\pi/\omega$.

For et system med flere frihetsgrader blir F_G en vektor \mathbf{F}_G og k_G en matrise \mathbf{k}_G . Dermed blir uttrykket for den modale stivhetsmatrisen

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Phi}^T (\mathbf{k} - \mathbf{k}_G) \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^T \bar{\mathbf{k}} \mathbf{\Phi}.$$

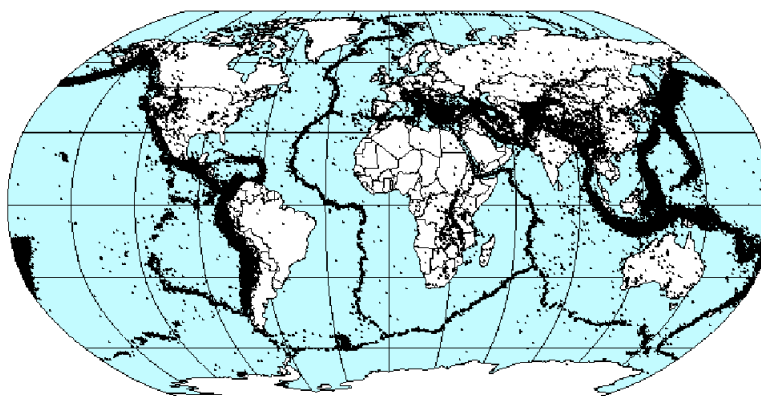
Innvirkningen av de geometriske effektene på den dynamiske likevektsligningen er avhengig av både størrelsen på aksiallasten og de vertikale bærekomponentenes knekklemdel. For de fleste norske bygg vil de geometriske effektene være neglisjerbare, men det stilles i eurokoden krav om at de skal medtas hvis de utgjør mer enn 10 % av responsen.

Kapittel 4

Seismologi

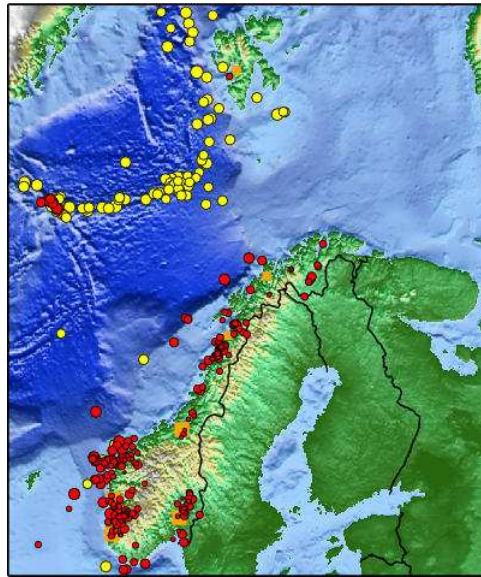
4.1 Innledning

Folk flest forbinder jordskjelv med kollisjoner mellom tektoniske plater på jordens overflate. California, India og Japan er eksempler på steder der slike plater møtes, og her er det relativt ofte jordskjelv [9]. Figur 4.1 viser episentrene til alle registrerte jordskjelv i perioden 1963-1998 over en viss styrke, og her ses det tydelig at fastlandsnorge ikke er et utsatt område. Det ses også at



Figur 4.1: Seismologisk verdenskart som viser registrerte episentre for jordskjelv med styrke over 3.5 i perioden 1963-1998 [33]

det til tider oppstår jordskjelv mellom plategrensene. Det skyldes at det skjer deformasjoner av jordskorpen. Norge er det området i nordeuropa som oftest utsettes for jordskjelv. Figur 4.2 viser jordskjelv her i landet fra 1979 til i dag. Her ses det at det, spesielt i kystområdet på vestlandet og i nærheten av Oslo, er en del seismisk aktivitet. I regioner som ligger midt på en tektonisk plate, er jordskjelv vanligvis ikke en dimensjonerende lastsituasjon for konstruksjoner. Likevel er det viktig å undersøke de seismiske lastvirkningene. Delvis fordi de er større for noen konstruksjoner enn for andre avhengig av geometri, naturlig vinkelfrekvens og dempningsforhold. Delvis fordi



Figur 4.2: Jordskjelv i Norge fra 1979 til i dag. De røde er merket av mennesker, de gule er andre jordskjelv med magnitudo større eller lik fire. De orange kvadratene angir større byer [25]

sentrale bygg og konstruksjoner som for eksempel sykehus og infrastruktur, er essensielle etter et stort jordskjelv, og sikkerhetsfaktorene for slike konstruksjoner derfor må være store. Det betyr at seismologi, eller læren om jordskjelv, viktig også i Norge [26].

I del 4.2 av dette kapitlet diskuteres de grunnleggende mekanismene bak et jordskjelv, og en del begreper introduseres. Dette benyttes i del 4.3 til å forklare hvilke forhold som har innvirkning på seismiske lastvirkninger på konstruksjoner. Her kommer vi frem til at grunnforholdene har særlig stor innflytelse på disse, og vi avslutter derfor med å se på effektene av grunnforholdene i avsnitt 4.4.

4.2 Mekanismer og begreper

Det finnes flere teorier om hvorfor jordskorpen er i bevegelse [24], men den mest utbredte er at det skyldes varme strømmer i mantelen som er en konsekvens av, at jordens kjerne er varmere enn jordskorpen. Bevegelsene kalles platetektonikk, og de skaper spenninger i jordskorpen. Når spenningene blir så store at det oppstår brudd, utløses det tøyingsenergi som sender bølger gjennom jorden: det oppstår et jordskjelv [9]. Spenningene som fører til jordskjelv, kan være bygd opp på en tektonisk plate, men det vanligste er at de er en konsekvens av at to plater støter mot hverandre, trekker seg fra hverandre eller beveger seg sidelengs i forhold til hverandre. Da vil bruddet i skorpen følge plategrensene, og området kalles en bruddsone eller forkastning. Stedet der bruddet begynner kalles jordskjelvets fokus, og det punkt på jordoverflaten som ligger rett over fokuset, er jordskjelvets episenter. Dersom jordskjelvet følger en forkastning, vil det skje mange brudd langs forkastningen svært hurtig etter hverandre. Ved store jordskjelv kan bruddsonen være flere hundre

kilometer lang, og da er det ikke avstanden til episenteret, men avstanden til forkastningen som er avgjørende for belastningen på en gitt konstruksjon [9].

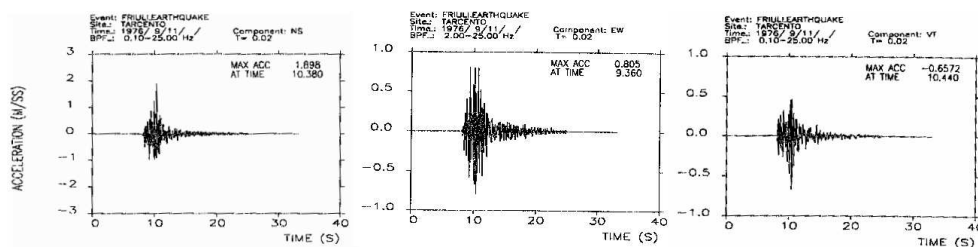
Et jordskjelvs størrelse kan angis på forskjellige måter. Magnituden er en angivelse av energimengden som utløses i skjelvet. Richters skala er et eksempel på en magnitudeangivelse, og som de fleste magnitudeskalaer, er den logaritmisk. En annen form for størrelsesangivelse er jordskjelvets intensitet. Den beskriver opplevelsen av et jordskjelv i form av hvor mange som har kjent det, om det ble krusninger på vann og lignende. Det er altså ikke en matematisk angivelse, og intensiteten til et gitt jordskjelv vil variere i forhold til hvor intensiteten angis for. Den er avhengig av avstand til bruddsonen, grunnforhold og en rekke andre parametre [24, 27].

Bølgene som oppstår i grunnen når et jordskjelv inntreffer, kan grovt deles inn i fire typer [9]. P-bølgene er trykkbølger. De beveger seg hurtigst gjennom jorden, og er dermed den typen som først kan avleses i et akselerogram. S-bølgene er skjærbølger, som beveger seg langsommere enn P-bølgene, men likevel så hurtig at de to bølgetypene ikke kan adskilles tydelig i et akselerogram. R-bølgene er overflatebølger, hvilket betyr at de kun beveger seg i jordskorpen. De er trykkbølger tilsvarende P-bølgene, men amplituden minsker med avstanden fra jordoverflaten. L-bølger er også overflatebølger, men de er skjærbølger tilsvarende S-bølgene. De beveger seg langsommere enn S-bølger, og også deres amplitude minsker med avstanden fra jordoverflaten. I et jordskjelv er R- og L-bølgenes innflytelse på grunnakselerasjonen reativt liten, så det er vanskelig å skille disse fra S-bølgene som de etterfølger. Det finnes mange undergrupper av de nevnte bølgene, men et grundigere studie av disse er irrelevant for formålet med denne oppgaven.

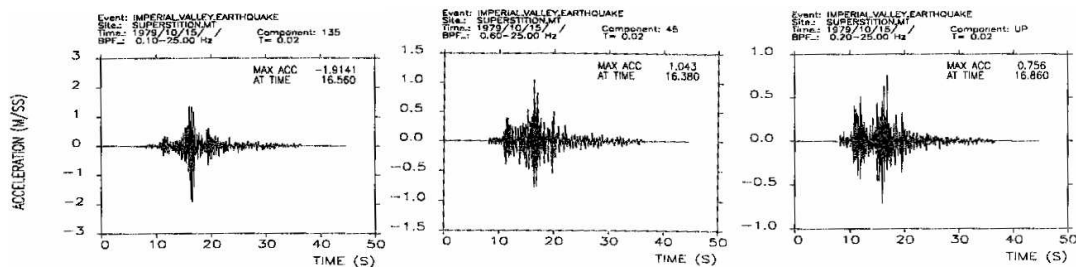
Under et jordskjelv vil grunnen akselerere mest i én hovedretning, men egenskapene til bølgene som er beskrevet ovenfor, medfører at det også inntreffer akselerasjon på tvers av hovedretningen. Denne er vanligvis ca. 0.85 ganger størrelsen på akselerasjonen i hovedretningen, og medfører at konstruksjoner må prosjekteres slik at de tåler grunnakselerasjon i begge hovedretninger samtidig [9].

4.3 Seismiske lastvirkninger på konstruksjoner

Belastningen på en konstruksjon i forbindelse med et jordskjelv skyldes grunnakselerasjonen som kan måles med et akselerometer. Figur 4.3, 4.4 og 4.5 viser eksempler på slike målinger, såkalte akselerogrammer [28]. Med tanke på grunnakselerasjon kan jordskjelv deles inn i fire kategorier [24]. Den første består nesten utelukkende av en enkelt impuls. Slike målinger er typiske for akselerometre plassert på fast grunn svært nær jordskjelvets episenter og for overfladiske jordskjelv. Den andre typen er en langvarig, ekstremt irregulær grunnakselerasjon som ofte kan måles på fast grunn et stykke fra jordskjelvets episenter. Denne typen grunnakselerasjon er den vanligste, og den er tilnærmet lik i begge horisontalretninger. Akselerogrammet i figur 4.5 er et eksempel på en slik måling. Den tredje formen for grunnakselerasjon er langvarig og tilnærmet periodisk. Slike målinger oppnås på steder der grunnen består av mange lag med ulike egenskaper [35, 24]. Vanligvis plasseres akselerografer på fast fjell, og denne typen akselerogrammer fremkommer ved beregninger basert på grunnens oppbygning og det målte akselerogrammet [34]. Et unntak

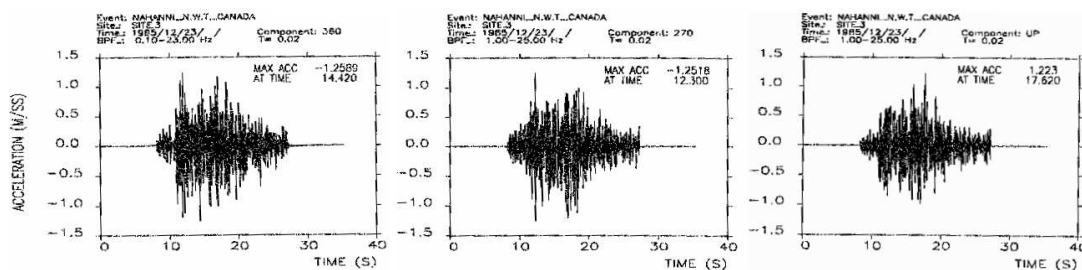


Figur 4.3: Grunnakselerasjon målt ved jordskjelvet i Friuli, Italia i 1976. Fra venstre er komponentene i retning nord-syd, øst-vest og vertikalt vist. Bemerk at skalaen for akselerasjon ikke er lik i de tre akselerogrammene. Figuren er gjengitt fra [28] etter tillatelse fra NORSAR



Figur 4.4: Grunnakselerasjon målt ved jordskjelvet i Imperial Valley, USA i 1985. Fra venstre er komponentene i retning 135, 45 og vertikalt vist. Bemerk at skalaen for akselerasjon ikke er lik i de tre akselerogrammene. Figuren er gjengitt fra [28] etter tillatelse fra NORSAR

er store, jordskjelvsutsatte områder med mange avsetninger over fast fjell som f.eks. vestkysten av Mexico. Her måles grunnakselerasjonen over løsmassene. Løsmassene filtrerer bølgene slik at akselerasjonen ved grunnoverflaten er tilnærmet periodisk. Det kan medføre stor forsterkning av responsen til en konstruksjon. Samtidig viser målinger at spissverdien til grunnens horisontale akselerasjon, $|\ddot{u}_g|_{max}$, generelt øker med reduksjon av løsmassenes fasthet [7, 35]. Derfor er store dybder til fjell og myke løsmasser ugunstig med tanke på prosjektering for jordskjelv [15]. Den siste typen jordskjelv medfører store, permanente deformasjoner av grunnen. Slike jordskjelv var sannsynligvis vanlige i Lappland for 8-9000 år siden. Stuoragurraforkastningen på Finnmarksvidda, se figur 4.6, er opp imot 8 meter høy og antakeligvis skapt i et slikt jordskjelv med magnitude på ca. 7. Bakgrunnen for disse skjelveene var trolig utløsning av spenninger i jordskorpen etter siste istid [25].



Figur 4.5: Grunnakselerasjon målt ved jordskjelvet i Nahanni, Canada i 1985. Fra venstre er komponentene i retning 360, 270 og vertikalt vist. Figuren er gjengitt fra [28] etter tillatelse fra NORSAR



Figur 4.6: Stuorragurraforkastningen på Finnmarksvidda er opp imot 8 meter høy og trolig skapt i et jordskjelv [25]

I praksis finnes det kombinasjoner av de fire nevnte typene grunnakselerasjon. Akselerogrammene i figur 4.3 og 4.4 er eksempler på en blanding av en impuls og en langvarig, irregulær grunnakselerasjon. Disse to målingene har også større avvik mellom komponentene i de to horisontalretninger enn akselerogrammene fra Nahanni.

I prosjekteringen må tas hensyn til innflytelsen som grunnens oppbygning har på de seismiske lastvirkningene. Det gjøres i NS-EN 1998-1 og 3491-12 ved inndeling i ulike grunntyper. Felles for de to regelverkene er at det ikke tas hensyn til grunnforholdene ved prosjektering for den vertikale grunnakselerasjonen. Årsaken er at det ikke finnes nok data omkring påvirkningen grunnforholdene har på responsen til vertikal grunnakselerasjon [15].

Akselerogrammer som vist i figur 4.3 - 4.5, måles ikke i Norge fordi Nordeuropa er et område med lav seismisitet. Derfor brukes det kun såkalte "weak motion"-seismografer her fordi de er mer sensitive. Det betyr at regelverk for dimensjonering for jordskjelv ikke kan baseres direkte på tidligere målinger herfra. I stedet benyttes målinger fra jordskjelv på steder som har tilnærmet samme geotekniske forhold som Norge. Målingene i figur 4.3 - 4.5 er fra Italia, Canada og USA, altså geografisk langt fra Norge. De *geotekniske* forholdene i Friuli, Nahanni og Imperial Valley, er likevel tilnærmet lik forholdene her, og magnituden til jordskjelvene tilsvarer de store jordskjelvene i Norge. Det er faktisk disse tre jordskjelvene som er benyttet i bestemmelsen av jordskjelvslastene i det norske tillegget til Eurocode 8 og i NS 3491-12 [28, 39, 42].

I California er det relativt enkelt å forutsi fremtidige seismiske lastvirkninger på et bygg fordi det foreligger mange akselerogrammer her og de dimensjonerende jordskjelvene stammer fra San Andreas-forkastningen. Dette er svært enestående forhold, og i andre områder, høyseismiske som lavseismiske, er det stort sett umulig å forutsi hvor et kommende jordskjelv vil ha fokus.

Belastningen på en konstruksjon utsatt for et gitt jordskjelv er avhengig av følgende forhold [9]

- Grunnmekanisme og geologiske forhold har innvirkning på lastvirkningene, men det er fortsatt uvisshet omkring den faktiske innflytelsen
- Avstanden til episenteret, skjelvets magnitudo og dybden av fokuset påvirker jordskjelvets intensitet der konstruksjonen er oppført
- Grunnforholdene har stor innflytelse på størrelsen av belastningen på konstruksjonen
- Størrelsen på konstruksjonens grunnflate påvirker konstruksjonens belastning fordi grunnakselerasjonen under en konstruksjon ikke er konstant. Hvis et bygg for eksempel står på sålefundamenter utsettes ikke disse for nøyaktig samme grunnakselerasjon eksakt samtidig. Det er mulig å regne på responsen til en konstruksjon der grunnakselerasjonen varierer over grunnarealet, men med mindre utstrekningen er større enn ca 500 meter vil variasjonen være neglisjerbar. Dette er altså en aktuell problemstilling for f. eks. lange bruer, men bygningene som denne oppgaven omhandler, har så liten grunnflate at grunnakselerasjonen kan betraktes som lik på samtlige fundamenter
- Dempningsforholdet og egensvingeperiodene til konstruksjonen er blant de viktigste parametrene for belastningen den utsettes for

Grunnens rotasjon om en vertikal akse måles vanligvis ikke ved jordskjelv, og det dimensjoneres heller ikke direkte for grunnrotasjon ved prosjektering av konstruksjoner til tross for at slik rotasjon skaper torsjon i bygningen. Det tas i stedet hensyn til virkningen av rotasjonsakselerasjonen ved at belastningen fra translasjonsdelen av grunnakselerasjonen økes litt i de gjeldende regelverk for dimensjonering. Grunnen til det er for det første at innvirkningen av grunnrotasjonen på belastningen kun er en brøkdel av påvirkningen fra translasjonen, og for det andre at grunnrotasjonen vanligvis ikke måles ved jordskjelv, så det finnes ikke nok målinger å bygge et regelverk på [8].

4.4 Grunn og fundamentering

Under et jordskjelv transporteres rystelsene gjennom grunnen, og derfor er løsmassenes egenskaper og dybde fra terreng av stor betydning for de seismiske lastvirkningene [43]. Innflytelsen til grunnforholdene er svært komplisert, men vi skal diskutere den litt her og se på eksempler på effekten av ulike grunnforhold i kapittel 5 og 17. Som nevnt i avsnitt 4.3, forsterker dype løsmasser lastvirkningene fra jordskjelv. Men situasjonen blir enda mer komplisert dersom tykkelsen på hvert løsmasselag ikke er konstant. I Norge er det ikke uvanlig å bygge på tomter der dypden til fjell er svært varierende. Skader fra tidligere jordskjelv viser at en slik variasjon er ugunstig, uansett om det er snakk om et jevnt fall eller at fjellet skaper et “basseng” som inneholder løsmasser [20, 35]. Innflytelsen må bestemmes gjennom to- eller tredimensjonale analyser [11]. De vil i de fleste tilfeller gjennomføres ved hjelp av elementmetoden, og ha størst innvirkning på bygg med lange egensvingeperioder.

Når grunnforholdene skal vurderes i forhold til seismiske lastvirkninger, er det vanlig å basere seg på egenskapene til de øverste 30 meterne fra terreng. Årsaken til dette er for det første at

forskningen innen seismiske lastvirkninger i stor grad har vært samlet i USA og 30 meter tilsvarer 100 feet. For det andre er det ofte dyrt å grave dypere enn 30 meter, og for det tredje har de øverste jordlagene størst innflytelse på lastvirkningene. Bygg med egensvingeperioder i området $0.4 - 2\text{ s}$ påvirkes i større grad av grunnforholdene enn bygg med naturlige svingeperioder i området $0.1 - 0.5\text{ s}$ [7]. I kapittel 5 skal vi se at det betyr at stivheten til grunnen har større innvirkning på grunnens spissshastighet enn spissakselerasjon [8].

Lastvirkningene fra jordskjelv er altså svært avhengig av grunnforholdene, men som vi senere skal se, er en minst like viktig parameter lenden på de første egensvingeperiodene til konstruksjonen. Det er en viss sammenheng mellom disse, for egensvingeperiodene avhenger av opplagerbetingelsene som igjen avhenger av grunnforholdene og fundamenteringsmetoden [43]. Vi kommer som nevnt, til å se eksempler på dette i kapittel 17.

Grunnforholdene vil påvirke forløpet til grunnakselerasjonen som en konstruksjon skal dimensjoneres for. Det har derfor innvirkning på lastvirkningene at det er stor avstand til fjell og hvilken type løsmasse som ligger under konstruksjonen. Men innvirkningen slutter ikke her. Et svært viktig begrep i forbindelse med prosjektering for seismiske lastvirkninger er samvirke mellom grunn og konstruksjon. Samvirken medfører at en konstruksjon som er fundamentert på myke masser, vil reagere annerledes på et jordskjelv enn en helt lik konstruksjon som står direkte på fjell. For det første vil grunnforholdene påvirke grunnakselerasjonsforløpet, men de mykere opplagerbetingelsene vil også påvirke de naturlige svingeperiodene og svingeformen til modene. Det vil vanligvis medføre mindre lastvirkninger på konstruksjonen [43], men veier ikke opp for forsterkningen fra løsmassene.

Kapittel 5

Respons- og designspekter

5.1 Innledning

I avsnitt 3.2 er den dynamiske likevektslikningen for lineært elastiske systemer med en frihetsgrad utledet, og det er vist at løsningen av denne for et gitt jordskjelv kun avhenger av ω og ξ . Der skal vi benytte i avsnitt 5.2, der responsspektrene for lineært elastiske systemer introduseres. Et responsspekter viser maksimalverdien til en respons i et dynamisk en-frihetsgradsystem utsatt for jordskjelv som funksjon av den naturlige vinkelfrekvensen og dempningsforholdet til konstruksjonen. I del 5.3 benyttes fellestrekkene til responsspektre for tidligere jordskjelv til å utvikle elastiske designspektre som benyttes ved prosjektering av nye lineært elastiske konstruksjoner.

Ved et jordskjelv blir en konstruksjon belastet fordi bølgene i grunnen tilfører den energi. Ved plastisk flytning opptas det energi, og tilleggskapasiteten som en konstruksjon oppnår ved at det tillates plastiske tøyninger, utnyttes vanligvis ved prosjektering. I del 5.4 utvikles responsspektre for elastoplastiske systemer, og disse sammenliknes med de tilsvarende elastiske responsspektrene.

5.2 Responsspektre for lineært elastiske systemer

Et responsspekter viser responsen for et system med en frihetsgrad ved et gitt jordskjelv. For et lineært elastisk system er responsen avhengig av den naturlige vinkelfrekvensen og dempningsforholdet til systemet. Når spektret er beregnet, kan det brukes for alle konstruksjoner som kun har en frihetsgrad og skal kontrolleres for jordskjelvet. Hvis spektret for eksempel angir den maksimale forskyvningen av frihetsgraden i løpet av jordskjelvet, vil det gi grunnlag for å beregne andre typer respons i systemet, så som maksimale spenninger i en gitt komponent. Når beregningen av en respons baseres på resultatene i et responsspekter, må det ikke gjennomføres en dynamisk analyse av det aktuelle systemet. Den dynamiske analysen er utført i beregningen av spektret, og alle avlede størrelser kan finnes ved statiske metoder. I dette avsnittet introduseres responsspektrene for tre

forskjellige typer respons. Som vi skal se, er det mulig å utlede disse spektrene fra hverandre. De viser med andre ord det samme. Alle tre blir likevel diskutert fordi noen trender kommer tydeligst frem i et av spektrene, mens andre fenomener er enklest å observere i et annet.

Et responspekter er basert på den dynamiske likevektsligningen. For et lineært elastisk en-frihetsgradsystem utsatt for akselerasjon av grunnen, er den gitt i ligning (3.3) som gjentas her:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = -\ddot{u}_g(t), \quad \text{der} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{og} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}}. \quad (5.1)$$

Det betyr at to systemer med samme naturlig vinkelfrekvens og dempningsforhold reagerer likt på et gitt jordskjelv. Derfor angir et responspekter kun en verdi for hver ω , og det er kun gyldig for ett dempningsforhold.

For enhver dynamisk forskyvning av frihetgraden finnes det en tilsvarende statisk last, F , som ville resultert i den samme forskyvningen. Den lasten kan beregnes fra stivhetsrelasjonen til systemet som for lineært elastiske systemer er gitt ved

$$F(t) = k u(t) = m \omega^2 u(t). \quad (5.2)$$

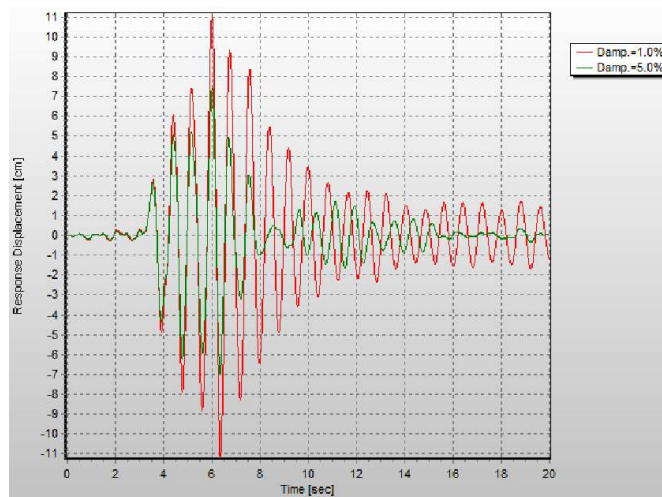
Når den tilsvarende statiske lasten er kjent, kan alle typer av respons bestemmes ved statisk analyse av konstruksjonen. Dermed går analysen fra å være dynamisk til å bli statisk, hvilket er å foretrekke med tanke på enkelthet og dermed også effektivitet i prosjekteringen. Derfor er den tilsvarende statiske lasten et sentralt begrep i denne oppgaven. Pseudoakselerasjonen til et system, $S_e(t, T, \xi)$, er akselerasjonen vi må multiplisere systemets masse med, for å oppnå den tilsvarende statiske lasten [8]. Den er altså direkte knyttet til belastningen på konstruksjonen. Pseudoakselerasjonen finnes fra ligning (5.2):

$$F(t) = m \omega^2 u(t) = m S_e(t, T, \xi) \quad \Leftrightarrow \quad S_e(t, T, \xi) = \omega^2 u(t). \quad (5.3)$$

For lineært elastiske systemer ser vi fra ligning (5.3) og (5.1) at $S_e(t, T, \xi)$ er avhengig av forløpet til grunnakselerasjonen ved jordskjelvet samt den naturlige vinkelfrekvensen og dempningsforholdet til systemet.

Uansett hvilken respons som betraktes, er det vanligvis den numerisk største verdien av responsen som er interessant fordi det er den konstruksjonen skal dimensjoneres for. Dersom systemet kan ta opp den største lasten som oppnås, F_{max} , uten at det oppstår plastiske deformasjoner, betyr det at forutsetningen om elastisk materiale er oppfylt. Den maksimale verdien av den tilsvarende statiske lasten opptrer når absoluttverdien til pseudoakselerasjonen er størst. Ved et jordskjelv svinger en konstruksjon vanligvis slik at den maksimale forskyvningen i positiv x -retning vil være tilnærmet lik den største verdi av forskyvningen i negativ x -retning. Et eksempel er vist i figur 5.1. For et en-frihetsgradsystem betyr det at F_{max} og F_{min} er tilnærmet like. Derfor er det den maksimale absoluttverdien til responsen vi er interessert i, så det arbeides i det følgende med tallverdier for laster og forskyvninger. Den maksimale tilsvarende statiske lasten finnes fra $S_e(T, \xi)$ som er den maksimale verdien av tallverdien til $S_e(t, T, \xi)$ i løpet av jordskjelvet, dvs.

$$S_e(T, \xi) = |S_e(t, T, \xi)|_{maks}. \quad (5.4)$$



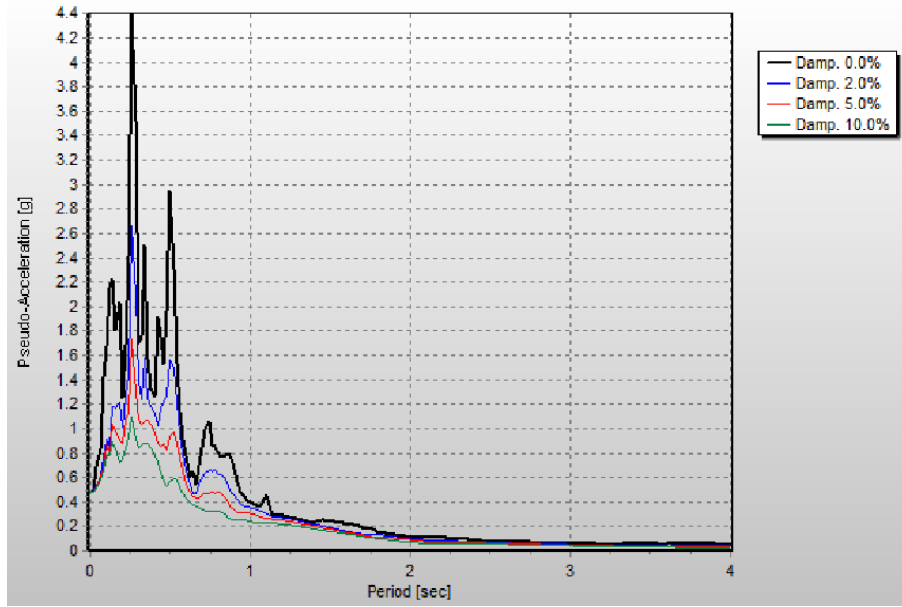
Figur 5.1: Forskyvning av enfrihetsgradsystemer med $T = 0.8 \text{ s}^{-1}$ utsatt for grunnakselerasjonen vist i figur 5.3 med $\xi = 0.01$ og $\xi = 0.05$. Det fremkommer at absoluttverdien til den maksimale forskyvningen i positiv og negativ retning er tilnærmet lik for begge systemene

Siden det generelt er $S_e(T, \xi)$ som er den interessante verdien av pseudoakselerasjonen, brukes den samme betegnelsen for $S_e(T, \xi)$ og $S_e(t, T, \xi)$.

Pseudoakselerasjonen til et system er en respons, og en graf som viser S_e for et gitt dempningsforhold som funksjon av den naturlige vinkelfrekvensen eller egensvingeperioden, kalles et responspekter for pseudoakselerasjonen [8, 9]. I denne oppgaven vil egensvingeperioden hovedsaklig bli benyttet fordi det er den som er brukt i NS 3491-12 og eurokoden [39, 42]. Figur 5.2 viser responspekter for pseudoakselerasjonen til lineært elastiske systemer med utvalgte dempningsforhold. I likhet med de fleste andre figurer i dette kapitlet er den generert i dataprogrammet SeismoSignal [36]. Figur 5.2 er beregnet ut fra grunnakselerasjonen som er vist i figur 5.3. SeismoSignal benytter Newmarks metode til å beregne responsen på en gitt grunnakselerasjon. Parametrene er satt slik at det tilsvarer konstant gjennomsnittsakselerasjon, dvs. $\beta = 0.25$ og $\gamma = 0.5$. Tidssteget som benyttes, er det minste av to prosent av egensvingeperioden og tidsintervallet som grunnakselerasjonen er oppgitt for.

Spektrene er svært hakkete, men de har likevel noen karakteristiske trekk som er illustrert i figur 5.4:

- For svært korte egensvingeperioder er pseudoakselerasjonen tilnærmet lik den maksimale grunnakselerasjonen. Det skyldes at en kort egensvingeperiode tilsvarer ekstremt stor stivhet, slik at massens totale forskyvning til enhver tid er bortimot den samme som grunnens forskyvning, $u^t(t) \approx u_g(t)$. Derfor er massens totale akselerasjon tilnærmet lik grunnens akselerasjon, $\ddot{u}^t(t) \approx \ddot{u}_g(t)$. Den dynamiske likevektslikningen består av elastiske krefter, dempningskrefter og treghetskrefter. De elastiske kreftene er lik den tilsvarende statiske lasten fordi $F(t) = k u(t) = m S_e(t, T, \xi)$ pr. definisjon. For stive systemer vil dempningskreftene være neglisjerbare fordi den relative hastigheten til massen, $\dot{u}(t) = \dot{u}^t(t) - \dot{u}_g(t)$ er ekstremt liten samtidig som dempningskoeffisienten c er liten nok til å gi $\xi < 1$. Innsatt i

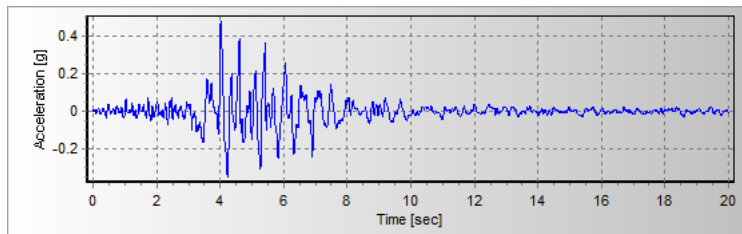


Figur 5.2: Responsspekter for pseudoakselerasjonen ved grunnakselerasjonen vist i figur 5.3. Dempningsforholdet for kurvene er 0, 2, 5 og 10 %. Egensvingeperioden er angitt i sekunder og grunnakselerasjonen i forhold til tyngdeakselerasjonen. Det ses at en økning av dempningsforholdet på 2 % har tilnærmet samme innflytelse på responsen til systemer med liten dempning som en økning på 5 % har på systemer med større dempning. Egensvingeperioden er angitt i sekunder og grunnakselerasjonen i forhold til tyngdeakselerasjonen

ligning (3.1) gir $c \dot{u}^t(t) \approx 0$, $k u(t) = m S_e(t, T, \xi)$ og $\ddot{u}^t(t) \approx \ddot{u}_g(t)$

$$m S_e(t, T, \xi) \approx m \ddot{u}^t(t) \Leftrightarrow S_e(T, \xi) \approx \ddot{u}_{g, maks}(t) \quad \text{for korte egensvingeperioder}$$

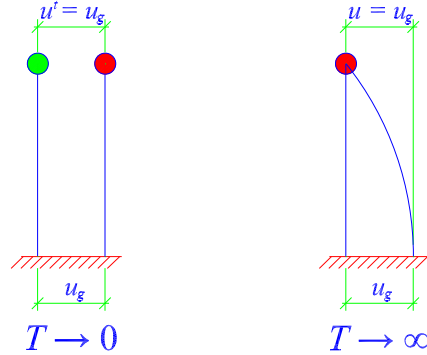
- Pseudoakselerasjonen er tilnærmet lik null for svært lange egensvingeperioder. Det skyldes at lange egensvingeperioder tilsvarer et stort forhold mellom masse og stivhet. Systemet er så fleksibelt at massen nesten står i ro mens grunnen beveger seg under den, dvs. $u^t(t) \approx 0$. Dermed blir massens relative forskyvning og grunnens forskyvning nesten like, $u(t) \approx u_g(t)$. Den naturlige vinkelfrekvensen til systemet grenser mot null fordi egensvingeperioden er lang, $T \rightarrow \infty \Leftrightarrow \omega \rightarrow 0 \text{ m/s}^2$. Innsatt i uttrykket for pseudoakselerasjonen i



Figur 5.3: Grunnakselerasjon som er benyttet i dataprogrammet SeismoSignal. Tiden er angitt i sekunder og grunnakselerasjonen i forhold til tyngdeakselerasjonen

likning (5.3) gir det

$$S_e(T, \xi) = \omega^2 u_{maks} \approx u_{g, maks} \cdot 0 \text{ s}^{-2} = 0 \quad \text{for lange egensvingeperioder}$$



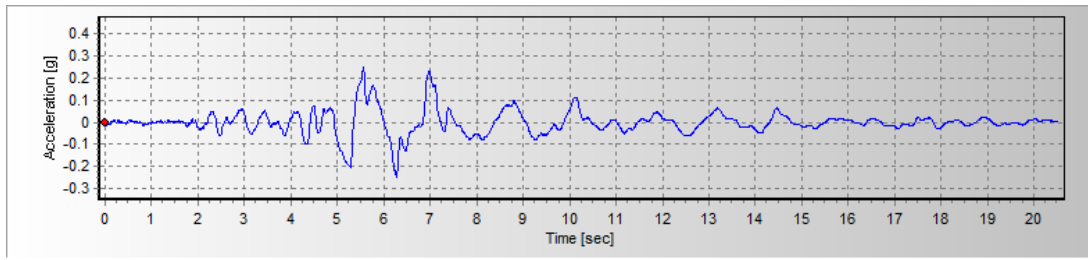
Figur 5.4: Respons til et enfrihetsgradsystem med henholdsvis stor og liten egensvingeperiode

Fra figur 5.2 ses det også at responsspektret blir mindre hakkete når dempningsforholdet økes fordi større dempningsforhold medfører mindre pseudoakselerasjon for alle egensvingeperioder. En gitt økning av dempningsforholdet har størst innflytelse for systemer med små dempningsforhold. For eksempel vil en økning fra $\xi = 0.01$ til $\xi = 0.03$ ha større betydning enn en økning fra $\xi = 0.11$ til $\xi = 0.13$. Her ses det også at effekten av dempningen er liten for egensvingeperioder som er kortere enn 0.3 sekunder. Årsaken til det er som nevnt, at den relative hastigheten til massen, $\dot{u}(t) = \dot{u}^t(t) - \dot{u}_g(t)$ er forsvinnende liten fordi den naturlige vinkelfrekvensen er stor. Samtidig er dempningskoeffisienten c liten nok til å gi $\xi < 1$, så $F_D = c \dot{u}(t) \approx c \cdot 0 \text{ m/s} = 0$.

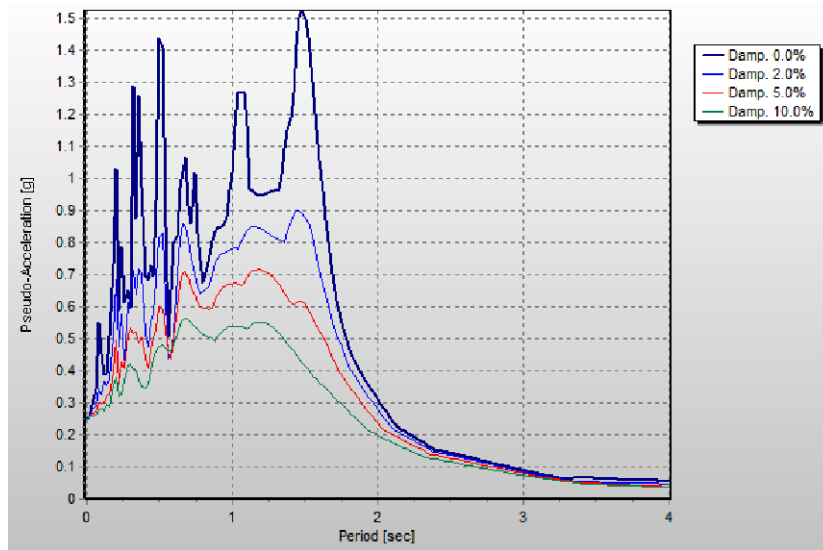
Dempningens innflytelse på systemets respons avhenger av forløpet til grunnakselerasjonen. I avsnitt 4.3 er forskjellige typer jordskjelv beskrevet. I en av disse kan belastningen i praksis beskrives ved en enkelt impuls. Et slikt grunnakselerasjonsforløp vil gjøre dempningens reduksjon av den maksimale responsen svært liten. Situasjonen er motsatt dersom belastningen er langvarig og tilnærmet periodisk, hvilket ofte er tilfelle for målinger på løsmasser. Da vil dempningsforholdet være helt avgjørende for responsen til systemer som har en egenfrekvens tilnærmet lik frekvensen til grunnakselerasjonen [8].

Diskusjonen ovenfor illustrerer hvorfor responsspektrene for forskjellige grunnakselerasjonsforløp har få likhetstrekk. Det vil nå bli vist for et konkret eksempel. Figur 5.5 viser en grunnaksele- rasjon som har en lengre “periode” enn den i figur 5.3. Responsspektret for pseudoakselerasjonen ved denne grunnakselerasjonen er vist for ulike dempningsforhold i figur 5.6. Ved å sammenlikne dette responsspektret med det i figur 5.2, ser vi at området med høye verdier er bredere og tilhører lengre egensvingeperioder. Eksemplet illustrerer en del av kompleksiteten ved jordskjelvsbelastning. Det er generelt ikke mulig å forutsi nøyaktig hvor episenteret og bruddsonen til et fremtidig jordskjelv vil ligge, og derfor heller ikke om konstruksjonene som skal sikres, vil bli utsatt for en last som kan beskrives som en ren impuls, en langvarig, irregulær last eller en kombinasjon av de to.

Aseudoakselerasjonen og akselerasjonen massen faktisk utsettes for er to forskjellige størrelser. De vil i mange tilfeller være tilnærmet like, men det er viktig å skille dem fra hverandre. Figur 5.7



Figur 5.5: Grunnakselerasjon som er benyttet i dataprogrammet SeismoSignal. Tiden er angitt i sekunder og grunnakselerasjonen i forhold til tyngdeakselerasjonen



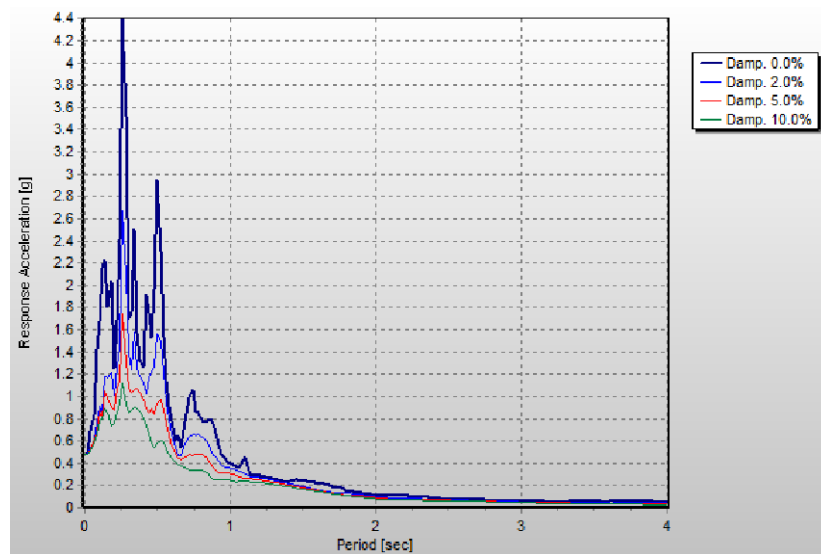
Figur 5.6: Responsspekter for pseudoakselerasjonen ved grunnakselerasjonen vist i figur 5.5. Dempningsforholdet for kurvene er 0, 2, 5 og 10 %. Egensvingeperioden er angitt i sekunder og grunnakselerasjonen i forhold til tyngdeakselerasjonen

viser responspektret for den virkelige akselerasjonen til massen i systemer utsatt for grunnakselerasjonen i figur 5.3. Det er vanskelig å se at denne avviker fra pseudoakselerasjonen i figur 5.2 fordi forskjellen er størst for lange naturlige svingeperioder og store dempningsforhold, to faktorer som reduserer både akselerasjonen og pseudoakselerasjonen. Det er dempningen i ligning (3.3) og innflytelsen den har på egensvingeperioden, se ligning (3.4), som er årsak til forskjellen. Siden dempningsforholdet er lite for konstruksjonene vi konsentrerer oss om i denne oppgaven er forskjellen ikke avgjørende her. Men det er likevel viktig å holde de to responsene atskilte fordi det er viktig å forstå hva vi beregner.

En annen respons som er interessant i forbindelse med prosjektering og kontroll av konstruksjoner, er forskyvningen av frihetsgraden $D(t, T, \xi) = u(t, T, \xi)$. Det er den maksimale verdien av forskyvningen som er avgjørende i prosjekteringen. Som for pseudoakselerasjonen benyttes absoluttverdien, slik at

$$D(T, \xi) = |u(t, T, \xi)|_{maks}. \quad (5.5)$$

Et responspekter for den maksimale forskyvningen av frihetsgraden i forbindelse med et gitt



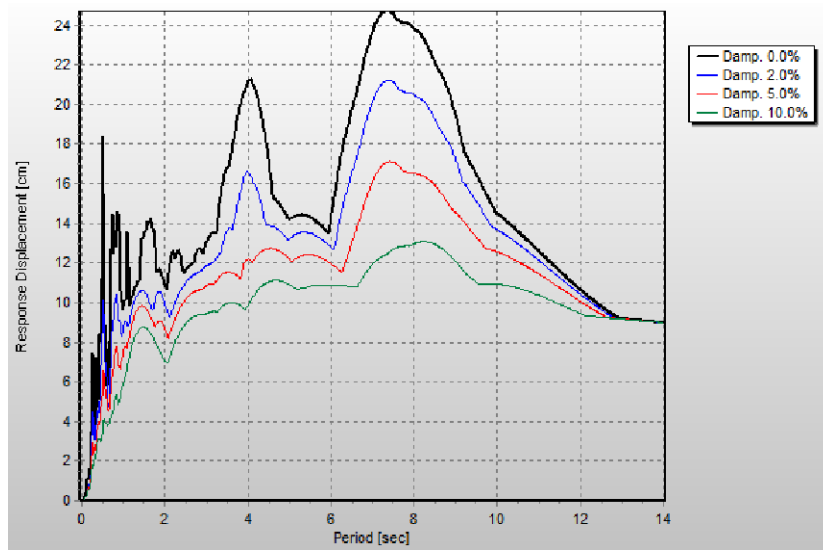
Figur 5.7: Responsspekter for akselerasjonen til systemer utsatt for grunnakselerasjonen vist i figur 5.3. Dempningsforholdet for kurvene er 0, 2, 5 og 10 %. Egensvingeperioden er angitt i sekunder og grunnakselerasjonen i forhold til av tyngdeakselerasjonen

jordskjelv vil som pseudoakselerasjonen være svært hakkete, spesielt for lave dempningsforhold og korte naturlige svingeperioder. Forskyvningsspektret for grunnakselerasjonen i figur 5.3 er vist i figur 5.8. Det har følgende generelle trekk, som er illustrert i figur 5.4:

- Svært stive konstruksjoner har nesten ingen relativ forskyvning, så når egensvingeperioden er ekstremt kort blir den relative forskyvningen neglisjerbar
- Fleksible systemer får en forskyvning som er tilnærmet lik grunnens forskyvning

Responsspektret i figur 5.8 viser at dempningsens innflytelse på den relative forskyvningen er minimal for systemer med lange egensvingeperioder. For den aktuelle grunnakselerasjonen gjelder dette naturlige svingeperioder som er lengre enn 13 s , men tendensen er generell for alle forskyvningsspektre. Grunnen til det er at systemet er så fleksibelt at den relative forskyvningen av massen er forsvinnende liten. Dermed blir den relative hastigheten til massen tilsvarende lav. Samtidig er dempningsforholdet gitt, og den naturlige vinkelfrekvensen går mot null for lange egensvingeperioder. Innsatt i ligning (5.1) gir det et forsvinnende lite bidrag fra dempning. Som et illustrerende eksempel på dette, betraktes et system med $T = 13\text{ s}$ og $\xi = 0.10$ utsatt for grunnakselerasjonen som er vist i figur 5.3. Den naturlige vinkelfrekvensen finnes fra uttrykket $\omega = \frac{2\pi}{T}$ som gir $\omega = 0.48\text{ s}^{-1}$. Den maksimale forskyvningen opptrer ved tidspunktet $t = 4.02\text{ s}$, og er lik 9.163 cm . På det samme tidspunktet er den relative hastigheten til massen lik -1.122 m/s . Det gir $|F_D/F_S| = |(2\xi\omega\dot{u}(4.02\text{ s})) / (\omega^2 u(4.02\text{ s}))| = 0.05$. Dempningskraften tilsvarer altså kun 5 % av den elastiske kraften, til tross for at det ble valgt et forholdsvis høyt dempningsforhold.

En svært viktig sammenheng mellom den maksimale forskyvningen og pseudoakselerasjonen kan



Figur 5.8: Responsspekter for maksimal forskyvning ved grunnakselerasjonen vist i figur 5.3. Dempningsforholdet for kurvene er 0, 2, 5 og 10 %. Spektret dekker lengre egensvingeperioder enn responsspektrene for pseudoakselerasjonen for å illustrere tendensene for lange egensvingeperioder. Egensvingeperioden er angitt i sekunder og forskyvningen i cm. Det ses at spektret er glattere for større dempningsforhold

finnes fra ligning (5.1), (5.2), (5.3) og (5.5):

$$D(T, \xi) = \frac{F_{maks}}{k} = \frac{F_{maks}}{m \omega^2} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{F_{maks}}{m} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 S_e(T, \xi). \quad (5.6)$$

Det betyr at responsspektret for pseudoakselerasjonen og den maksimale forskyvningen viser det samme. Den eneste forskjellen er faktoren $(2\pi/T)^2$ foran pseudoakselerasjonsspektret [8]. Det faktum at D er tilnærmet konstant for lange egensvingeperioder gir følgende sammenheng som det ikke er mulig å se fra responsspektret for pseudoakselerasjon:

$$D(T, \xi) \approx u_{g, maks} \quad \Leftrightarrow \quad S_e(T, \xi) \approx \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 u_{g, maks} \quad \text{for store egensvingeperioder.}$$

Hva som kan defineres som en lang egensvingeperiode, avhenger av jordskjelvets magnitudo. Vi kommer tilbake til dette i avsnitt 5.3.

Den siste responsen som behandles i dette kapitlet, er pseudohastigheten. Den er definert som

$$V(T, \xi) = \omega D(T, \xi) \quad (5.7)$$

Pseudohastigheten er relatert til den maksimale tøyingsenergien som opptrer i systemet i løpet av et jordskjelv, siden

$$E_S = \int_0^D F(\tilde{D}) d\tilde{D} = \int_0^D k \tilde{D} d\tilde{D} = \frac{1}{2} k D^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{V}{\omega} \right)^2 = \frac{1}{2} m V^2,$$

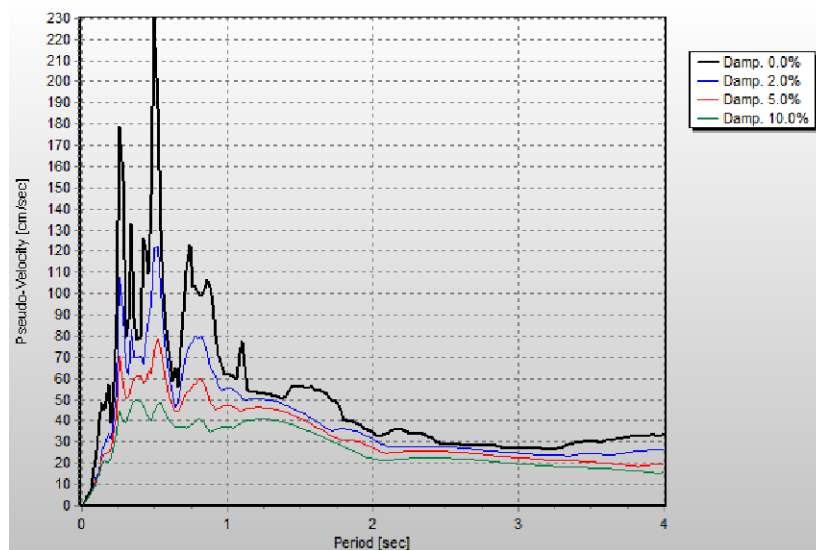
der D er gitt i ligning (5.5) [8].

Figur 5.9 viser pseudohastigheten for grunnakselerasjonen i figur 5.3 for utvalgte dempningsforhold. Som for alle andre typer respons, avhenger formen på responsspektret av forløpet til grunnakselerasjonen, men noen generelle trekk finnes. De er som følger:

- For ekstremt korte naturlige svingeperioder er pseudohastigheten forsvinnende liten. Årsaken til det er at massens relative forskyvning er tilnærmet lik null. Ved å sammenlikne pseudohastigheten med forskyvningsspektret i figur 5.8 ses det at pseudohastigheten stiger hurtigere enn forskyvningen i dette området. Det skyldes at pseudoakselerasjonen er proporsjonal med den naturlige vinkelfrekvensen som er stor når egensvingeperioden er liten
- Pseudohastigheten er liten for lange naturlige svingeperioder. Det skyldes at den naturlige vinkelfrekvensen til et system grenser mot null når egensvingeperioden er lang, mens den maksimale relative forskyvningen nærmer seg grunnens største forskyvning under jordskjevet. Innsatt i uttrykket for pseudohastigheten gir det

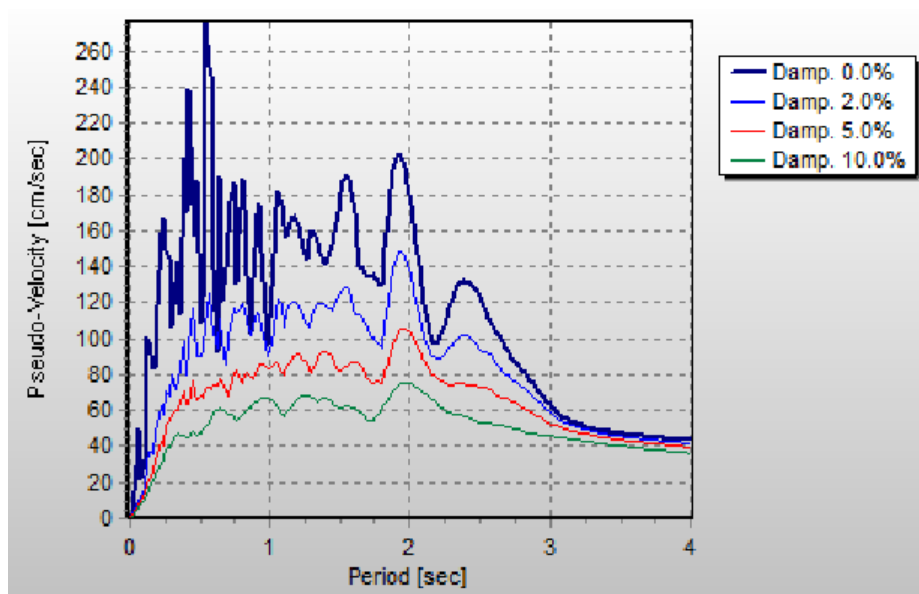
$$V(T, \xi) = u_{maks} \omega \approx u_{g, maks} \cdot 0 \text{ s}^{-1} = 0.$$

Pseudohastigheten reduseres ikke like raskt som pseudoakselerasjonen, fordi den naturlige vinkelfrekvensen inngår i første grad i uttrykket for V , men i andre grad i uttrykket for S_e

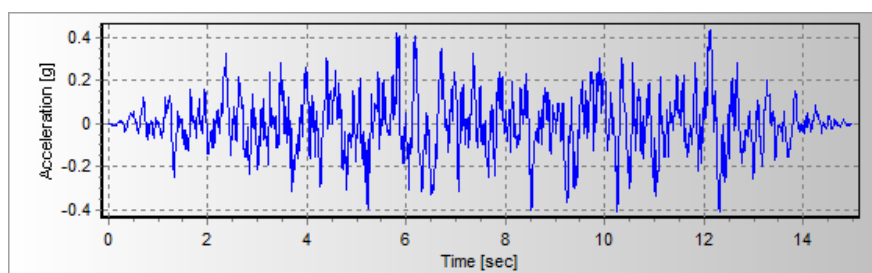


Figur 5.9: Responsspekter for pseudohastigheten ved grunnakselerasjonen vist i figur 5.3. Dempningsforholdet for kurvene er 0, 2, 5 og 10 %. Egensvingeperioden er angitt i sekunder og pseudohastigheten i cm/s

For å illustrere hvordan formen på responsspektret for pseudohastigheten påvirkes av avstanden til forkastningen, sammenliknes figur 5.9 og 5.10. Figur 5.10 viser pseudohastigheten basert på grunnakselerasjonen i figur 5.11 for ulike dempningsforhold. Pseudohastigheten i figur 5.10 har store verdier i et bredere område av egensvingeperioder. Det skyldes at grunnakselerasjonene er så forskjellige. Akselerasjonen i figur 5.3 er målt i en relativt kort avstand fra forkastningen. Det gir store utslag i en kort periode. Grunnakselerasjonen i figur 5.11 er derimot typisk for målinger



Figur 5.10: Responsspekter for pseudohastigheten ved grunnakselerasjonen vist i figur 5.11. Det ses at området med betydelig pseudohastighet er bredere enn i figur 5.9. Dempningsforholdet for kurvene er 0, 2, 5 og 10 %. Egensvingeperioden er angitt i sekunder og pseudohastigheten i cm/s

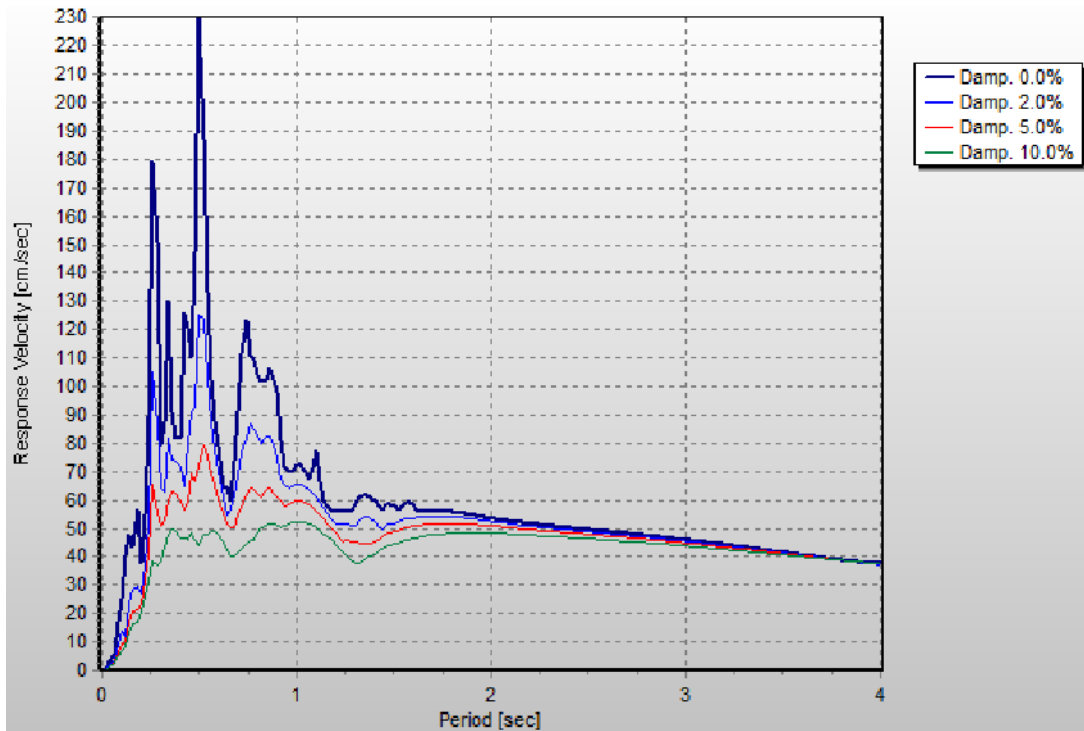


Figur 5.11: Grunnakselerasjon som er benyttet i dataprogrammet SeismoSignal. Tiden er angitt i sekunder og akselerasjonen i forhold til tyngdeakselerasjonen

lengre fra forkastningen, der utslagenes størrelse er tilnærmet konstante gjennom hele målingen. Sammenlikningen viser en typisk tendens, nemlig at området der pseudohastigheten har store verdier generelt er større for responsspektre som er basert på grunnakselerasjoner målt i stor avstand til forkastningen, enn for responsspektre som er basert på målinger tatt i umiddelbar nærhet av bruddsonen [8].

Den relative hastigheten til systemet (i forhold til grunnen) og pseudohastigheten er to forskjellige størrelser selv om de i noen tilfeller vil være tilnærmet like. Figur 5.12 viser responsspektret for den relative hastigheten til systemer utsatt for grunnakselerasjonen i figur 5.3. Vi ser at denne avviker mest fra pseudohastigheten i figur 5.9 ved lange naturlige svingeperioder. Som nevnt ved figur 5.7 skyldes forskjellen dempningen i systemet.

Vi har sett at pseudoakselerasjon og forskyvning er knyttet til kraft og deformasjon, parametre



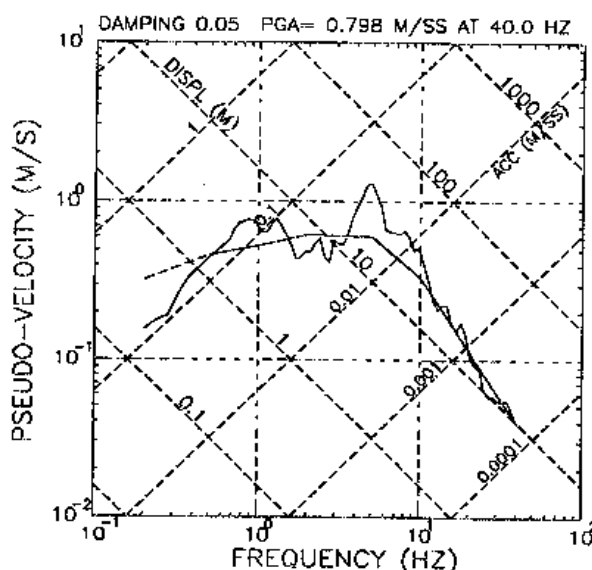
Figur 5.12: Responsspekter for den relative hastigheten til massen, \dot{u}_{maks} ved grunnakselerasjonen vist i figur 5.3. Dempningsforholdet for kurvene er 0, 2, 5 og 10 %. Egensvingeperioden er angitt i sekunder og hastigheten i cm/s

som konstruksjoner dimensjoneres for. Pseudohastigheten er ikke like intuitivt knyttet til dimensjoneringskrav, men den er likevel viktig fordi den er knyttet til pseudoakselerasjonen og forskyvningen gjennom relasjonen som fremkommer i ligning (5.6) og (5.7),

$$S_e(T, \xi) = \omega V(T, \xi) = \omega^2 D(T, \xi). \quad (5.8)$$

Sammenhengen i ligning (5.8) medfører at det er mulig å tegne opp responsspektrene for pseudoakselerasjon, pseudohastighet og maksimal forskyvning i ett og samme diagram. Et slikt responsspekter er vist i figur 5.13 [28]. Her er den naturlige vinkelfrekvensen gitt logaritmisk langs den horisontale akse, pseudohastigheten langs den vertikale akse og pseudoakselerasjon og forskyvning langs akser som er vinklet 45 grader. Det er også tegnet inn et glattere designspekter som er basert på responsspektrene som er beregnet ut fra grunnakselerasjonene i figur 4.3 - 4.5.

Spekrene for $S_e(T, \xi)$, $V(T, \xi)$ og $D(T, \xi)$ gjør det til sammen mulig å se sammenhenger som legges til grunn når det skal utvikles designspekter, altså spekter som benyttes ved prosjektering av fremtidige konstruksjoner. Det er nettopp dette viktige temaet vi nå skal se nærmere på.



Figur 5.13: Responsspekter for EW-grunnakselerasjonen vist i figur 4.3 samt designspekter for alle grunnakselerasjonene i figur 4.3 - 4.5. Dempningsforholdet er 5 %. Figuren er gjengitt fra [28] etter tillatelse fra NORSAR

5.3 Elastisk designspekter

Som vist i avsnitt 5.2, er responspektrene for et gitt jordskjelv svært hakkete, og variasjonene mellom spektrene for forskjellige jordskjelv er store. Med tanke på prosjektering, er det derfor ikke tilstrekkelig å kontrollere at en konstruksjon tåler et gitt historisk jordskjelv, til tross for at skjelvet det kontrolleres for har forekommet i geografisk nærhet av byggeplassen. Sannsynligheten for at et fremtidig jordskjelv vil belaste konstruksjonen på samme måte er minimal. Det finnes to løsninger på dette problemet. Enten må den nye konstruksjonen prosjekteres for flere historiske grunnakselerasjoner, eller responspektrene for flere tidligere jordskjelv i samme geografiske område må kombineres til et designspekter. Det er den siste metoden vi her skal se nærmere på. Kombinasjonen av responspektrene gjøres ved hjelp av metoder basert på sannsynlighetsregning. Vi skal gjennomgå hovedtrekkene i en slik prosess.

Det finnes to forskjellige motivasjoner bak et designspekter. Et mål er at konstruksjonen ikke skal ta skade av et moderat jordskjelv som med stor sannsynlighet vil opptre i løpet av konstruksjonens levetid. Et annet er at den ikke skal bryte sammen i forbindelse med det største jordskjelvet som med selv den minste sannsynlighet kan forekomme i området. Det skyldes at et kollaps ikke kun vil medføre store økonomiske tap, men trolig også tap av menneskeliv [9]. I Norge dimensjoneres konstruksjoner kun på bakgrunn av den siste av de to motivasjonene. Det fremgår av punkt NA.2.1 i eurokoden og punkt 3.2.1 i [34]. Årsaken er antakelig at jordskjelvene som med stor sannsynlighet vil oppstå i løpet av konstruksjonens levetid, er så små at de ikke vil påføre skade på en konstruksjon som er dimensjonert for vindlaster.

Når et designspekter skal utarbeides, er det vanlig å basere det på responspektrene for tidligere

jordskjelv i det aktuelle geografiske området. En forutsetning er at de er målt ved like grunnforhold, vanligvis på fjell. Den maksimale grunnakselerasjonen normaliseres slik at pseudoakselerasjonen konvergerer mot samme verdi for små egensvingeperioder (se diskusjonen ved figur 5.4). Den maksimale grunnakselerasjonen for hvert av jordskjelvene multipliseres altså med en faktor slik at den får en på forhånd bestemt verdi, f. eks. $\ddot{u}_{g, maks} = 1g$. Det kan brukes andre normaliseringsparametre, f.eks. $|u_{g, maks}| = 0.1 m$ [8]. Spektrene vil være svært ulike i tillegg til at de er hakkete. Det vil likevel fremgå noen karakteristiske trekk som ses i figur 5.13 og repeteres her: For pseudoakselerasjonsspektrene vil en generelt se en tendens til høye verdier for relativt korte egensvingeperioder, hvorefter verdiene reduseres tilnærmet eksponensielt med økende naturlig svingeperiode. Forskyvningsspektret begynner ved null, stiger raskt ved korte egensvingeperioder for å bli tilnærmet konstant for perioder som er lengre enn de som medførte tilnærmet konstant pseudoakselerasjon. Deretter reduseres forskyvningen for å stabiliseres ved $D = u_{g, maks}$ for lange egensvingeperioder. Pseudohastigheten begynner også ved null, stiger hurtigere enn forskyvningen og oppnår sin maksimale verdi ved en egensvingeperiode som ligger mellom de som gir størst verdier for pseudoakselerasjonen og forskyvningen. Deretter reduseres pseudohastigheten i takt med at de naturlige svingeperiodene blir lengre.

Gjennomsnittsverdien av de normaliserte pseudoakselerasjonene vil være mye glattere enn de enkelte spektrene. Samtidig vil standardavviket til de normaliserte pseudoakselerasjonene generelt være stort fordi spektrene for hvert jordskjelv er svært ulike som konsekvens av den store variasjonen mellom forløpet til grunnakselerasjonen i forskjellige jordskjelv. Standardavviket er definert som

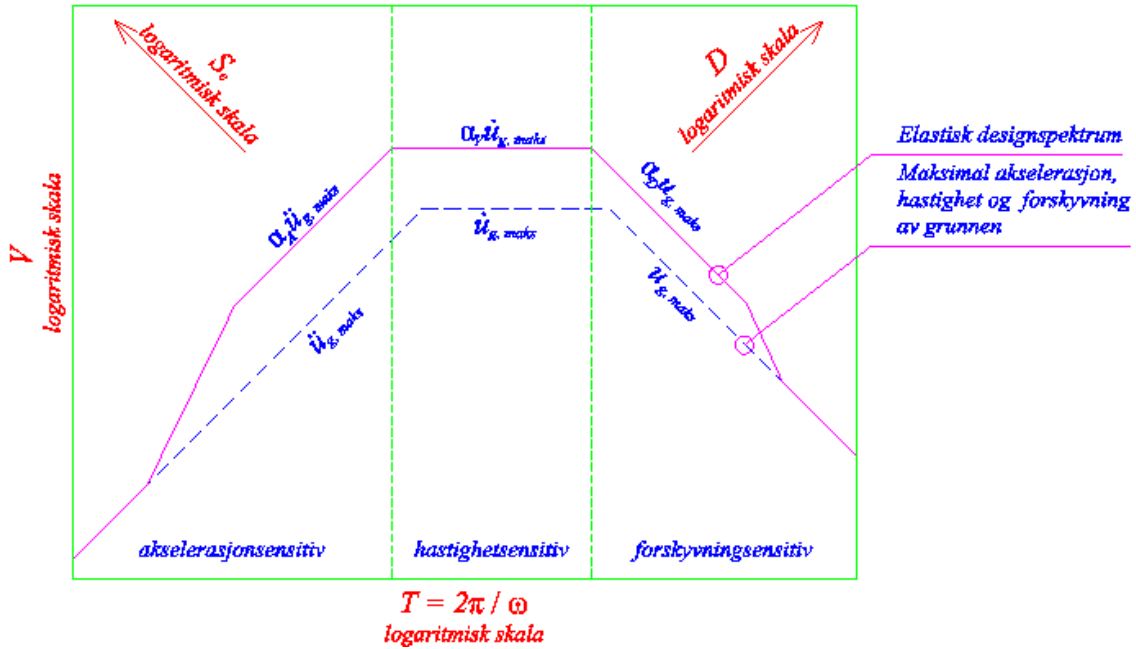
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_{e,i} - \bar{S}_e)^2} \quad ,$$

der \bar{S}_e er middelveien og n er antallet spektre. Ofte vil middelveien pluss noen standardavvik, antallet avhenger av konsekvensene ved sammenbrudd, legges til grunn for dimensjonering av nye konstruksjoner, altså til utarbeidelse av et designspekter. Disse er som nevnt, mye glattere enn spektrene for de enkelte jordskjelv, og de vil være tilnærmet konstante i visse områder. Før de kan benyttes til dimensjonering, må de skaleres slik at maksimal grunnakselerasjon til spektret tilsvare den maksimale grunnakselerasjonen det skal dimensjoneres for. Et eksempel er NS-EN 1998-1 og NS 3491. Her er det elastiske designspektret normalisert slik at den maksimale grunnakselerasjon er lik en. Ved å multiplisere spektret med den maksimale grunnakselerasjonen som en gitt konstruksjon skal dimensjoneres for oppnås det elastiske designspektret for konstruksjonen. Den maksimale grunnakselerasjonen avhenger av den geografiske plasseringen av konstruksjonen, samt hva konstruksjonen skal brukes til. Et sykehus skal f.eks. tåle en høyere grunnakselerasjon enn et boligbygg, og bygg i Alta skal ikke dimensjoneres for like høy grunnakselerasjon som bygg i Oslo.

I praksis er det ikke gjennomsnittet av spektrene eller gjennomsnittet pluss standardavvik som benyttes direkte som designspekter av flere årsaker. Den viktigste er mangel på brukbare målinger av grunnakselerasjon. Jordskjelv, i den størrelsesordenen som konstruksjoner dimensjoneres for i ulykkesgrensetilstand, oppstår med opptil flere hundre års mellomrom. Samtidig ble den første tids-historiemålingen av grunnakselerasjon utført ved jordskjelvet ved Long Beach i 1933 [8]. Mange steder, blant annet i Norge, finnes det ingen slike målinger. Der må designspektret anslås ut fra de lokale geotekniske forholdene og spektre for jordskjelv målt andre steder med tilnærmet samme

forhold. I avsnitt 4.3 så vi at de norske regelverkene er basert på grunnakselerasjonsforløp i Italia, USA og Canada.

Sammenhengen i ligning (5.8) medfører som nevnt, at det er mulig å tegne opp responsspektrene for pseudoakselerasjon, pseudohastighet og maksimal forskyvning i ett og samme diagram. Figur 5.13 er et eksempel på det. Dermed ses sammenhenger mellom grunnakselerasjon og respons som det er vanskelig å se ut fra spektrene med lineære akse. Disse sammenhengene kan generelt sammenfattes som vist i figur 5.14. Faktorene α_A , α_V og α_D er avhengige av dempningsforholdet



Figur 5.14: Generell sammenheng mellom maksimal pseudoakselerasjon (S_e), pseudohastighet (V) og forskyvning (D) som funksjon av egensvingeperioden

[8]. Det fremgår av figur 5.2, 5.9 og 5.8. I figur 8.9 ses designspektre med lineære akser. Som tidligere diskutert, avhenger responsen til konstruksjoner med kort egensvingeperiode hovedsakelig av den maksimale grunnakselerasjonen, mens konstruksjoner med lang naturlig svingeperiode er mest avhengig av grunnens maksimale forskyvning. For egensvingeperioder som hverken ser svært korte eller lange er det den største hastigheten til grunnen som er mest utslagsgivende for responsen. Spektret deles på bakgrunn av dette i et akselerasjon-, hastighet- og forskyvnings sensitivt område. Størrelsen på det hastighetsensitive området avhenger av avstanden til bruddsonen, og egensvingeperioden ved overgangen fra hastighet- til forskyvningsensitive systemer, T_D , avhenger av jordskjevets magnitudo, M [14]. Sammenhengen kan skrives som [17]

$$T_D = 10^{\frac{M-5}{2}}. \quad (5.9)$$

Egensvingeperioden varierer altså eksponensielt med magnituden, og er lik 1.5 s for 5.4-jordskjelv, 3.2 s for magnitudo 6 og 10 s for jordskjelv med magnitudo 7.

Designspektrene som er beskrevet i dette avsnittet, har to ulemper. For det første har de ikke samme standardavvik for alle egensvingeperioder. Siden responsspektrene de ble basert på ble normalisert

for samme maksimale grunnakselerasjon, vil standardavviket i det akselerasjonssensitive området være mindre enn i området med større egensvingeperiode. Det kan løses ved å normalisere mer enn en faktor, altså ikke kun $S_e(T = 0)$ men også $S_e(T = T_1)$, $S_e(T = T_2)$ osv. Prosedyren er beskrevet i [9]. Den andre ulempen er at designspektrene ikke tar høyde for lokale forhold så som grunnens oppbygning og avstanden til forkastningen. Disse problemene kan løses ved å lage lokale designspektre som er basert på jordskjelv ved like geologiske, seismologiske og geofysiske forhold [9].

5.4 Plastisk responsspekter

I dette avsnittet skal vi først betrakte den dynamiske likevektsligningen for et elasto-plastisk system. Denne benyttes deretter til å argumentere for forskjellene mellom responsspektre for elastiske og elasto-plastiske systemer.

I et system som ikke er elastisk med en monotont voksende kraft-forskyvningsrelasjon, så som lineært elastiske systemer, vil den elastiske kraften i systemet ikke kun avhenge av tøyningene. Den vil også påvirkes tøyningshistorien. Denne sammenhengen angis ved å skrive $F_S = F_S(u, \dot{u})$, der u er forskyvningen [8]. I denne oppgaven begrenses teorien om systemer som ikke er lineært elastiske, til idealiserte elasto-plastiske systemer. Det er to årsaker til denne avgrensingen. For det første er NS 3491-12 og NS-EN 1998-1 basert på kraft-forskyvningsforløp av denne typen, og for det andre er utledningen av responsspektrene for andre kraft-forskyvningsforløp lik utledningen for lineært elasto-plastiske systemer [8, 15, 42].

Kraft-forskyvningsforløpet til et idealisert elasto-plastisk system er vist i figur 5.15 [8]. Det er antatt at det ikke oppstår fastning. Vi ser at et system som belastes med en større last enn flyte-lasten F_y , vil få permanente deformasjoner. I det følgende introduseres en rekke sentrale begreper innenfor teorien om responsen til et elasto-plastisk system utsatt for grunnakselerasjon. Disse er illustrert i figur 5.15.

Forskyvningen der flyt initieres betegnes u_y , og den tilsvarende lasten F_y .

Det tilsvarende elastiske systemet er det lineært elastiske systemet som har samme stivhet som det elasto-plastiske har i sitt elastiske område. Systemene har like dempningsforhold og masse, så den naturlige vinkelfrekvensen til de to er lik ved forskyvninger som er mindre enn u_y . Når den naturlige vinkelfrekvensen til et elasto-plastisk system omtales menes den naturlige vinkelfrekvensen til det tilsvarende elastiske systemet. Det samme gjelder for egensvingeperioden.

Det tilsvarende elastiske systemet utsatt for samme grunnakselerasjon som det elasto-plastiske, vil oppnå maksimal forskyvningen u_0 og maksimal kraft F_0 . Det betyr at det i et lineært elasto-plastisk system med $F_y > F_0$ ikke vil opptre plastiske deformasjoner i løpet av jordskjelvet.

Den maksimale forskyvningen til systemet betegnes u_m .

- Den normaliserte flytestyrken

Det fremkommer av den dynamiske likevektstiligningen:

$$\begin{aligned}
 m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + F_S(u, \dot{u}) &= -m \ddot{u}_g(t) \quad \Leftrightarrow \\
 \ddot{u}(t) + 2\xi\omega \dot{u}(t) + \frac{F_S(u, \dot{u})}{m} &= -\ddot{u}_g(t) \quad \Leftrightarrow \\
 \ddot{u}(t) + 2\xi\omega \dot{u}(t) + \omega^2 \frac{F_S(u, \dot{u})}{k} &= -\ddot{u}_g(t) \quad \Leftrightarrow \\
 \ddot{u}(t) + 2\xi\omega \dot{u}(t) + \omega^2 u_y \frac{F_S(u, \dot{u})}{F_y} &= -\ddot{u}_g(t), \tag{5.12}
 \end{aligned}$$

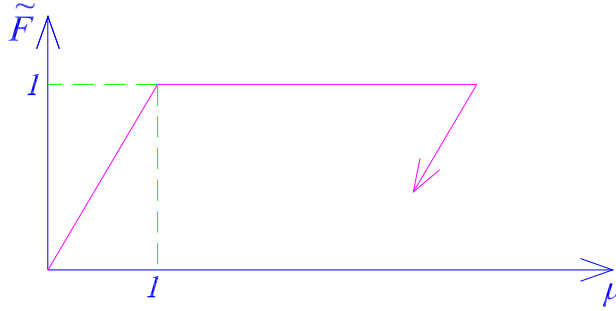
Forskyvningen $u(t)$ avhenger altså av u_y , ω og ξ i tillegg til forløpet til grunnakselerasjonen og kraft-forskyvningsrelasjonen. Funksjonen $\tilde{F}(u, \dot{u})$ defineres som $\tilde{F}(u, \dot{u}) = \frac{F_S(u, \dot{u})}{F_y}$. Den beskriver sammenhengen mellom kraft og forskyvning. Innsatt i ligning (5.12) ovenfor gir det

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega \dot{u}(t) + \omega^2 u_y \tilde{F}(u, \dot{u}) = -\ddot{u}_g(t) \tag{5.13}$$

Ligning (5.13) deles på forskyvningen ved initiert flyt. Det gir

$$\ddot{\mu}(t) + 2\xi\omega \dot{\mu}(t) + \omega^2 \tilde{F}(\mu, \dot{\mu}) = -\frac{\ddot{u}_g(t)}{u_y}. \tag{5.14}$$

Det er den maksimale verdien av $\mu(t) = \frac{u(t)}{u_y}$ som betegnes μ . Funksjonen $\tilde{F}(\mu, \dot{\mu})$ er dimensjonsløs og vist i figur 5.16. Sammenhengen med kraft-forskyvningsdiagrammet i figur 5.15 blir klart når vi bemerker at $F_S = F_y$ medfører at $\tilde{F}(\mu, \dot{\mu}) = 1$ og at $u = u_y$ medfører at $\mu = 1$.



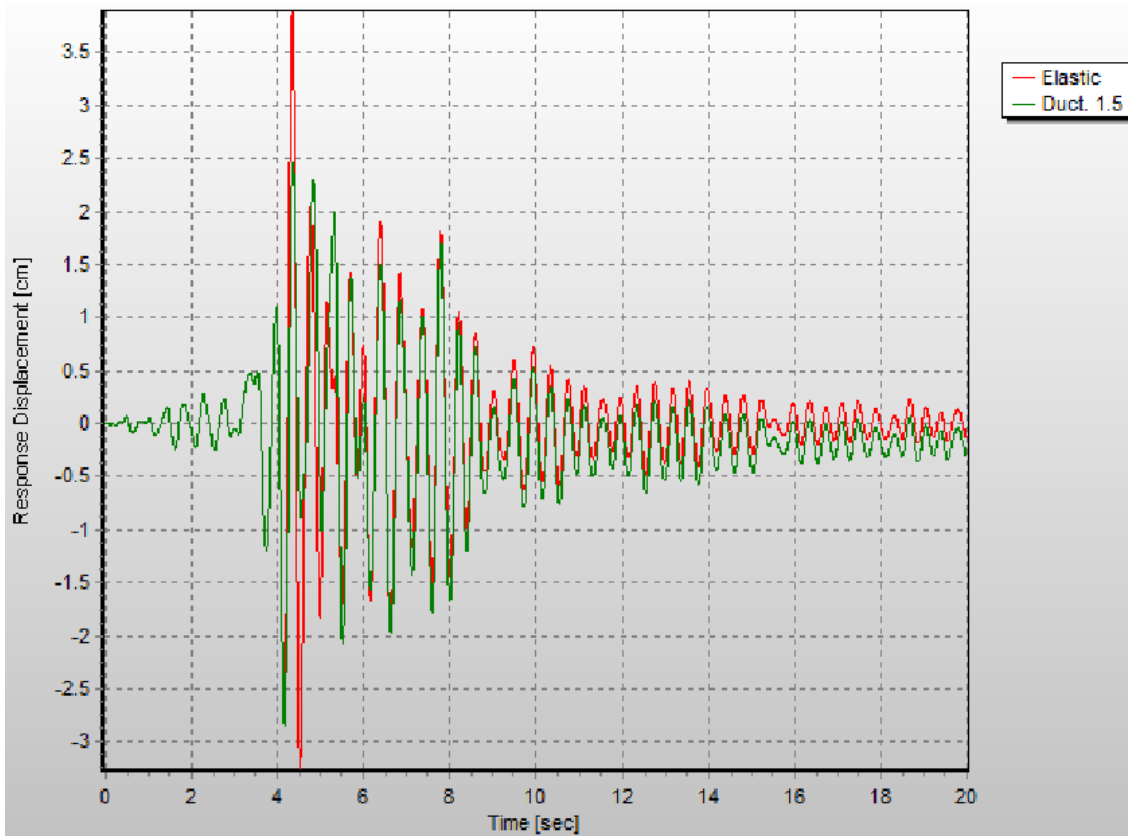
Figur 5.16: Funksjonen $\tilde{F}(\mu, \dot{\mu})$ er en dimensjonsløs beskrivelse av kraft-forskyvningsdiagrammet til systemet

Høyre side av ligning (5.14) avhenger av \tilde{F}_y , ω og ξ i tillegg til forløpet til grunnakselerasjonen fordi

$$\frac{\ddot{u}_g(t)}{u_y} = \frac{\ddot{u}_g(t) k}{F_y} = \frac{\ddot{u}_g(t) k}{\tilde{F}_y F_0} = \frac{\ddot{u}_g(t)}{\tilde{F}_y u_0}.$$

Siden den maksimale forskyvningen av det tilsvarende elastiske systemet er avhengig av den naturlige vinkelfrekvensen, dempningsforholdet og forløpet til grunnakselerasjonen, er det hermed vist at duktilitetsfaktoren avhenger av \bar{F}_y , ω og ξ i tillegg til $\ddot{u}_g(t)$ [8].

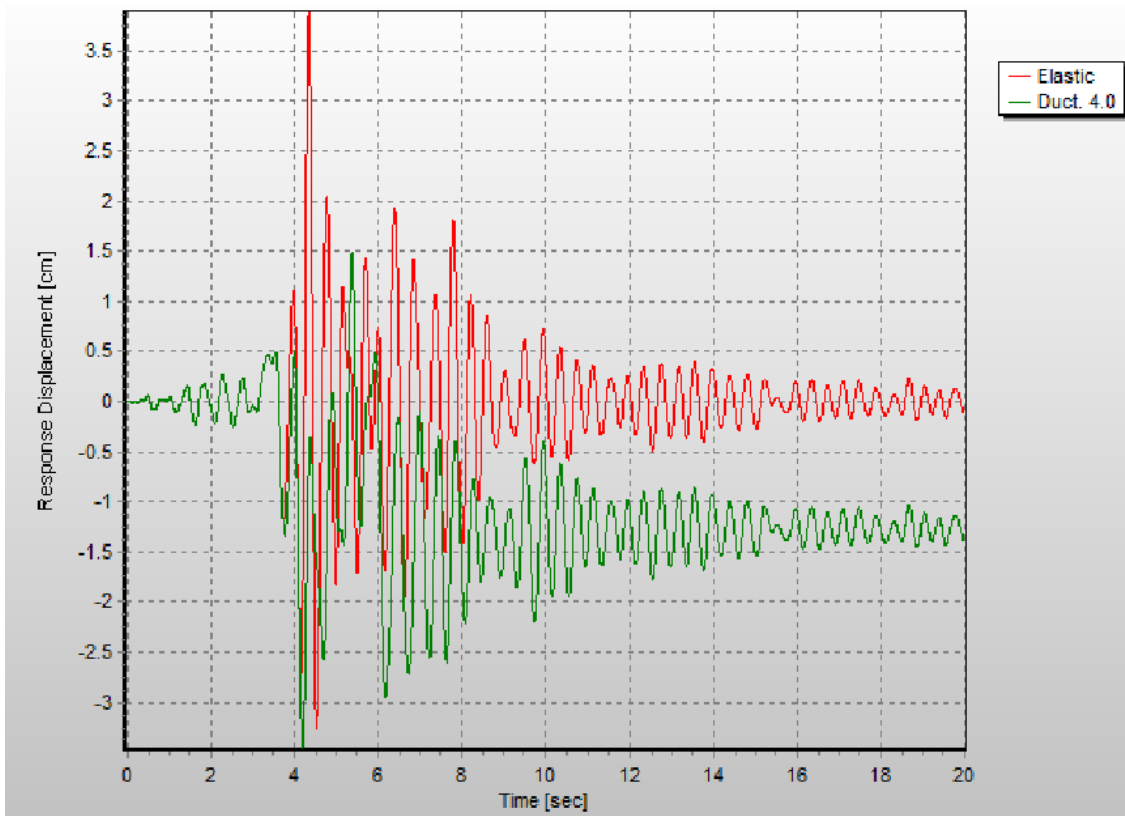
Figur 5.17 viser forskyvningen til to systemer med naturlig svingeperiode på 0.4 sekunder og dempningsforhold på 5 % utsatt for grunnakselerasjonen som er vist i figur 5.3. Det ene systemet



Figur 5.17: Forskyvningsforløpet til to systemer utsatt for grunnakselerasjonen i figur 5.3. Begge systemene har $T = 0.4$ s og $\xi = 0.05$. Det ene har $\mu = 1.0$ og det andre har $\mu = 1.5$

er elastisk, mens duktilitetsfaktoren til det andre er 1.5. Vi ser at forskyvningene til de to systemene er eksakt like de første fire sekundene, hvoretter belastningen blir så stor at det elasto-plastiske systemet får plastiske deformasjoner. Det ses også at forskyvningsforløpene til de to systemene er like etter de første ti sekundene bortsett fra en konstant forskjell grunnet den plastiske forskyvningen av det elasto-plastiske systemet.

Figur 5.18 viser forskyvningsforløpet til det samme elastiske systemet, men duktilitetsfaktoren til det elasto-plastiske systemet er her 4. Forskyvningsforløpet til det elasto-plastiske systemet avviker fra det elastiske sitt allerede før det har gått fire sekunder, og først etter 16 sekunder er de to forskyvningsforløpene like med unntak av den permanente plastiske forskyvningen. Den maksimale forskyvningen til det elasto-plastiske systemet er større enn den maksimale forskyvningen til det tilsvarende elastiske systemet. Som det fremgår av figur 5.17, er det ikke tilfelle når duktili-



Figur 5.18: Forskyvningsforløpet til to systemer utsatt for grunnakselerasjonen i figur 5.3. Begge systemene har $T = 0.4$ s og $\xi = 0.05$. Det ene har $\mu = 1.0$ og det andre har $\mu = 4$

tetsfaktoren er 1,5.

Duktilitetsfaktoren kan betraktes som et krav til konstruksjonen. Dersom kraften som tilsvarer begynnelsen flyt i et system, F_y , er mindre enn den maksimale lastkapasiteten som kreves for at det skal forbli elastisk under et jordskjelv, F_0 , må systemets duktilitetsfaktor være stor nok til at det ikke oppstår brudd. Som nevnt, avhenger μ av \bar{F}_y , ω og ξ i tillegg til $\ddot{u}_g(t)$. For å finne en normalisert flytestyrke, \bar{F}_y , som tilsvarer en akseptabel maksimal forskyvning, $u_m = \mu u_y$, må det interpoleres. Hvis den normaliserte flytestyrken medfører en for stor duktilitetsfaktor må F_y økes, men det vil påvirke stivheten til det tilsvarende elastiske systemet som igjen påvirker den naturlige vinkelfrekvensen.

Pseudoakselerasjonen til et elasto-plastisk system er gitt av ligningen

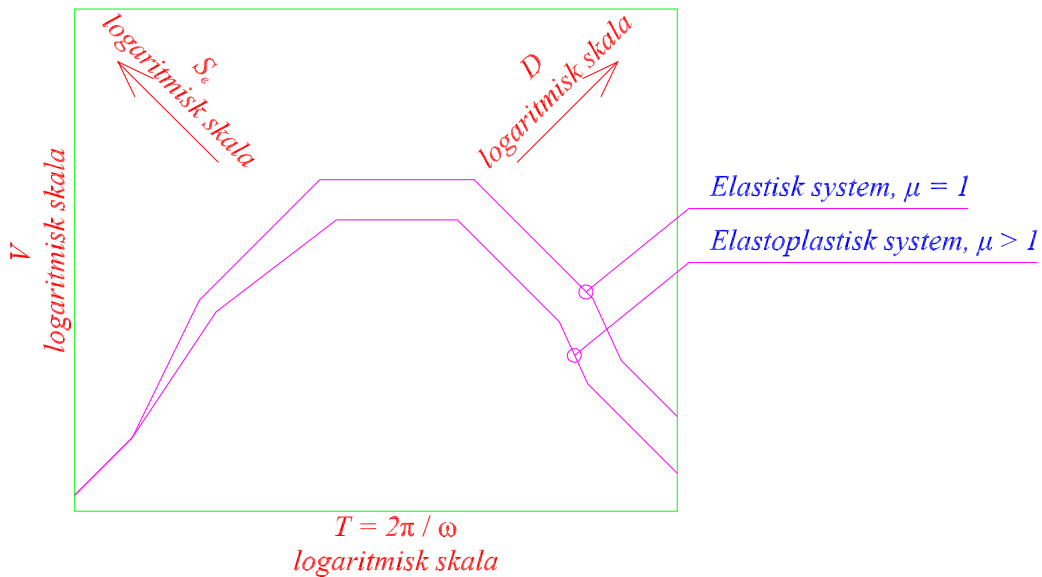
$$S_e(T, \xi, \mu) = \omega^2 u_y.$$

Det er altså deformasjonen der flyt initieres som inngår, ikke den maksimale deformasjonen u_m [8]. Det betyr at pseudoakselerasjonen fortsatt er direkte knyttet til den maksimale tilsvarende statiske lasten fordi

$$F_{max} = F_y = k u_y = m \omega^2 u_y = m S_e(T, \xi, \mu).$$

Pseudohastigheten V og forskyvningen D angis også for overgangen til flyt, slik at sammenhengen i ligning (5.8) er gyldig også for elasto-plastiske systemer.

Pseudoakselerasjonen er mindre for et elasto-plastisk system enn for et lineært elastisk system fordi u_y er mindre enn u_0 . De plastiske deformasjonene medfører altså en reduksjon av de tilsvarende statiske lastene. Viskøs dempning har den samme virkningen, men effektiviteten til de to er forskjellige for ulike naturlige svingeperioder. Figur 5.19 viser effekten plastiske tøyninger har på et responsspekter. I avsnitt 5.2 er det forklart hvorfor viskøs dempning har liten effekt på respon-



Figur 5.19: Designspektrere for to systemer. Responseren reduseres på grunn av plastiske deformasjoner. Figuren illustrerer dette ved to generaliserte designspektrere. Det ene er gyldig for elastiske systemer, det andre for elasto-plastiske systemer

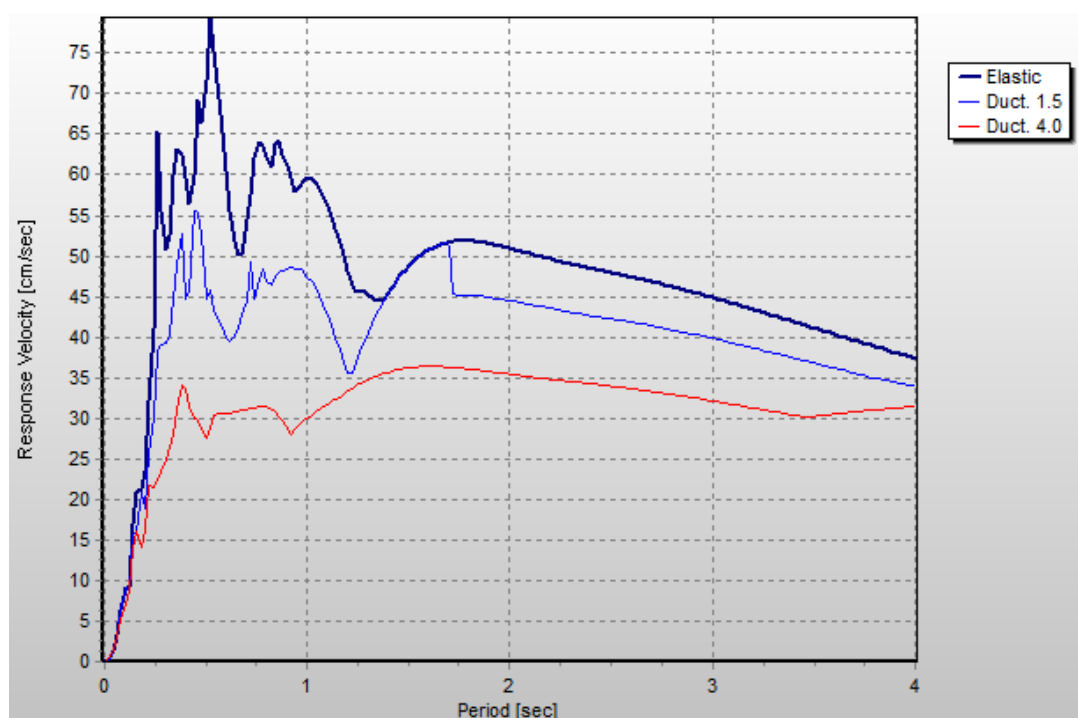
sen til systemer med både svært korte og lange naturlige svingeperioder. De plastiske effektene påvirker derimot responsen til alle systemer som ikke har ekstremt korte naturlige svingeperioder. Viskøs dempning har generelt mindre effekt på responsen til et system med plastiske deformasjoner enn på et elastisk system. Grunnen til det anskueliggjøres i figur 5.20 der responsspektrere for maksimal relativ hastighet er vist for tre forskjellige duktilitetsfaktorer. Grunnakselerasjonen spektrene er laget på bakgrunn av, er vist i figur 5.3, og alle systemene har samme viskøse dempningsforhold. Det ses at den maksimale relative hastigheten generelt er mindre for systemer med større duktilitet, og det medfører at dempningskraften også er mindre for større μ .

Studier basert på målte grunnakselerasjonsforløp viser en direkte sammenheng mellom reduksjonen i lastvirkninger på grunn av plastiske deformasjoner og duktilitetsfaktoren. I det hastighet- og forskyvningsensitive området, der reduksjonen er størst, er denne gitt som [8]

$$\bar{F}_y \approx \mu^{-1}. \quad (5.15)$$

Denne enkle sammenhengen er benyttet i eurokoden og NS 3491-12.

Et designspekter for elasto-plastiske systemer konstrueres på samme måte som et elastisk de-



Figur 5.20: Responsenspektre for maksimal relativ hastighet for tre forskjellige duktilitetsfaktorer. Grunnakselerasjonen vist i figur 5.3, og $\xi = 0.05$ for alle systemene. Hastigheten er angitt i cm/s og egensvingeperioden i s .

signspekter. Det påvirkes av duktilitetsfaktoren i tillegg til parametrene som inngår i et elastisk designspekter. Derfor trengs det et spekter for hver kombinasjon av μ og ξ som ønskes belyst.

Kapittel 6

Responsspekteranalyse

6.1 Innledning

I avsnitt 3.6 er tidshistorieanalysen gjennomgått. For et flerfrihetsgradsystem utsatt for et gitt jordskjelv, gir den responsen som funksjon av tiden. Ved å benytte grunnakselerasjonsforløp som tilsvaret det gjeldende designspektret, er det mulig å benytte tidshistorieanalysen ved prosjektering. Men det er svært tidkrevende fordi den dynamiske analysen krever stor beregningskapasitet. Ved hjelp av responsspektrene, som ble introdusert i kapittel 5, kan vi bestemme den maksimale responsen til et en-frihetsgradsystem uten å gjennomføre en full dynamisk analyse. Siden det vanligvis er den maksimale responsen som er interessant med tanke på prosjektering, betyr det at responsspektrene er sentrale ved dimensjonering for jordskjelv.

På den ene siden har vi altså en eksakt, men svært tidkrevende prosedyre for å finne responsen til et system med flere frihetsgrader utsatt for jordskjelv. På den andre siden har vi en svært effektiv prosedyre til å finne den maksimale responsen til et en-frihetsgradsystem utsatt for det samme jordskjelvet. I avsnitt 3.5 ble det vist at responsen til et klassisk dempet, lineært elastisk system med n frihetsgrader kan beskrives ved responsen til n lineært elastiske en-frihetsgradsystemer. Derfor er det mulig å benytte responsspektrene til å anslå responsen til et system med flere frihetsgrader. Responsen beregnes ved den modale analysen, hvis viktige sammenheng kommer frem i ligning (3.34) som gjentas her:

$$r(t) = \sum_{k=1}^n r_k(t) = \sum_{k=1}^n r_k^{st} \omega_k^2 D_k(t).$$

Den maksimale responsen som er fysisk mulig, fremkommer dersom alle modene oppnår sin maksimale verdi samtidig. Derfor må responsen være oppad begrenset av

$$r_{maks} \leq \sum_{k=1}^n r_k^{st} \omega_k^2 D_{k, maks}. \quad (6.1)$$

Som vi skal se i dette kapitlet, er sannsynligheten for at det skjer ekstremt liten [8]. Det betyr at det

er for konservativt å dimensjonere en konstruksjon for responsen som fremkommer av uttrykket i ligning (6.1). Det er altså nødvendig å kombinere responsene på en annen måte. I dette kapitlet utvikles to uttrykk for kombinasjon av responsen fra moder. Disse er valgt fordi de benyttes i NS 3491-12 og NS-EN 1998-1. De er basert på teorien om stokastiske vibrasjoner, så for å kunne utvikle dem må vi først ta en gjennomgang av Fourieranalysen i avsnitt 6.2. Den benyttes i avsnitt 6.3 til å utlede funksjoner som gjør det mulig å beregne responsen til et en-frihetsgradsystem utsatt for et gitt last-forløp. Vi finner altså et matematisk uttrykk for $u(t)$, slik at vi kan bestemme forskyvningen uten bruk av numeriske tidsstegmetoder. Resultatet benyttes til å utlede en viktig sammenheng mellom den Fouriertransformerte til last- og forskyvningsforløpet. Det resulterer i et enkelt uttrykk for sammenhengen mellom last og respons. I avsnitt 6.4 følger en introduksjon av to funksjoner som er benyttet i utledningen av kombinasjonsreglene. Deretter, i avsnitt 6.5, benyttes Fourieranalysen til å fastslå noen generelle egenskaper til responsen for et system med en frihetsgrad som utsettes for en type grunnakselerasjon kalt hvit støy. Disse egenskapene belyser en del av sammenhengene det må tas hensyn til ved kombinasjon av responsen fra flere moder. I avsnitt 6.6 utledes tilnærmede formler for responsen til et flerfrihetsgradsystem ut fra responsen til hver mode. En av disse benyttes i avsnitt 6.7, der vi ser på responsen til et system som belastes av grunnakselerasjon i begge horisontalretninger samtidig. Til slutt, i avsnitt 6.8, diskuteres fordele og ulemper ved forskjellige metoder for bestemmelse av responsen til elasto-plastiske systemer utsatt for grunnakselerasjon.

6.2 Fouriertransformasjon

Den dynamiske likevektsligningen til et lineært elastisk system med en frihetsgrad er som følger:

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = p(t).$$

Dersom belastningen skyldes et jordskjelv, blir $p(t) = -m \ddot{u}_g(t)$. I det tilfellet vil belastningen generelt være svært uregelmessig, slik at det må benyttes numeriske tidsstegmetoder for å bestemme $u(t)$. Hvis lasten derimot kan beskrives som et harmonisk forløp, $p(t) = A \sin \bar{\omega} t$, kan løsningen finnes analytisk. Dersom lasten påføres ved et bestemt tidspunkt, f.eks $t = 0$, vil forskyvningsfunksjonen bestå av en transient del og en stasjonær del. Dempning medfører at den transiente delen reduseres med tiden, mens den stasjonære forblir. Hvis vi tenker oss at lasten har virket i all evighet, er det kun den stasjonære delen som gjenstår i forskyvningsforløpet. Derfor er det den vi konsentrerer oss om i dette avsnittet.

En periodisk funksjon kan ved hjelp av Fourierrekker beskrives som summen av uendelig mange harmoniske funksjoner [21]:

$$p(t + j\bar{T}) = p(t), \quad \text{der } j \in \mathbf{Z} \quad \Leftrightarrow \quad (6.2)$$

$$p(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\bar{\omega}t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\bar{\omega}t), \quad (6.3)$$

der Fourierkoeffisientene er gitt som

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\bar{T}/2}^{\bar{T}/2} p(t) dt \quad a_j = \frac{2}{T} \int_{-\bar{T}/2}^{\bar{T}/2} p(t) \cos(j\bar{\omega}t) dt \quad b_j = \frac{2}{T} \int_{-\bar{T}/2}^{\bar{T}/2} p(t) \sin(j\bar{\omega}t) dt \quad (6.4)$$

for

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}. \quad (6.5)$$

I ligning (6.3) ser vi at a_0 er gjennomsnittsverdien til $p(t)$, mens a_j og b_j er amplitudene til henholdsvis cosinus- og sinusleddene med frekvens $j\bar{\omega}$. Ved hjelp av ligning (6.2) til (6.5) kan vi bestemme responsen til en vilkårlig periodisk last fordi systemet vi betrakter er lineært elastisk, og superposisjonsprinsippet derfor er gyldig. I denne oppgaven fokuserer vi på lastene som oppstår i forbindelse med jordskjelv, og de er generelt ikke periodiske. Derfor er resultatet ikke til stor hjelp, og vi skal nå arbeide videre for også å kunne benytte metoden på laster som ikke er periodiske. I uttrykket for Fourierkoeffisientene kan det skrives som $\bar{T} \rightarrow \infty$. Følgende utledning av Fouriertransformasjonen vil basere seg på “ingeniørmatematikk”, dvs. at det benyttes noen logiske slutninger som ikke er strengt matematisk gyldige [21].

Dersom middelverdien til $p(t)$ er null, kan vi skrive

$$p(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_{-\bar{T}/2}^{\bar{T}/2} p(t) \cos(j\bar{\omega}t) dt \cos(j\bar{\omega}t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_{-\bar{T}/2}^{\bar{T}/2} p(t) \sin(j\bar{\omega}t) dt \sin(j\bar{\omega}t)$$

Vi innfører betegnelsene $\bar{\omega}_j = j\bar{\omega}$ og $\Delta\bar{\omega} = \bar{\omega}_j - \bar{\omega}_{j-1}$, hvormed vi får

$$p(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Delta\bar{\omega}}{\pi} \int_{-\bar{T}/2}^{\bar{T}/2} p(t) \cos(\bar{\omega}_j t) dt \cos(\bar{\omega}_j t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Delta\bar{\omega}}{\pi} \int_{-\bar{T}/2}^{\bar{T}/2} p(t) \sin(\bar{\omega}_j t) dt \sin(\bar{\omega}_j t)$$

En funksjon som ikke er periodisk, kan betraktes som en funksjon med uendelig lang periode. Når $\bar{T} \rightarrow \infty$ medfører det at $\Delta\bar{\omega} \rightarrow d\bar{\omega}$, og at summen $\sum_{j=1}^{\infty}$ blir et integral med grenser $\bar{\omega} = 0$ og $\bar{\omega} = \infty$ [21]. Det betyr at

$$p(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cos(\bar{\omega}t) dt \cos(\bar{\omega}t) d\bar{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \sin(\bar{\omega}t) dt \sin(\bar{\omega}t) d\bar{\omega}.$$

Begge funksjonene som skal integreres, er symmetriske om $\bar{\omega} = 0$ [21], så grensene for integrasjonen kan endres slik:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cos(\bar{\omega}t) dt \cos(\bar{\omega}t) d\bar{\omega} + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \sin(\bar{\omega}t) dt \sin(\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cos(\bar{\omega}t) dt \cos(\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \sin(\bar{\omega}t) dt \sin(\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cos(\bar{\omega}t) dt \sin(\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \sin(\bar{\omega}t) dt \cos(\bar{\omega}t) d\bar{\omega}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Den siste delen av ligning (6.6) er gyldig fordi $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cos(\bar{\omega} t) dt$ er symmetrisk med hensyn på $\bar{\omega}$ om $\bar{\omega} = 0$, mens $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) \sin(\bar{\omega} t) dt$ er antisymmetrisk om $\bar{\omega} = 0$, slik at [21]

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cos(\bar{\omega} t) dt \sin(\bar{\omega} t) d\bar{\omega} = - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cos(\bar{\omega} t) dt \sin(\bar{\omega} t) d\bar{\omega}$$

og

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \sin(\bar{\omega} t) dt \cos(\bar{\omega} t) d\bar{\omega} = - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \sin(\bar{\omega} t) dt \cos(\bar{\omega} t) d\bar{\omega}.$$

Ligning (6.6) kan omskrives til

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cos(\bar{\omega} t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \sin(\bar{\omega} t) dt \right) (\cos(\bar{\omega} t) + i \sin(\bar{\omega} t)) d\bar{\omega},$$

som ved hjelp av Eulers formel kan forenkles til

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\bar{\omega} t} dt \right) e^{i\bar{\omega} t} d\bar{\omega}.$$

Funksjonen $P(\bar{\omega})$ defineres som

$$P(\bar{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\bar{\omega} t} dt. \quad (6.7)$$

Det betyr at

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega} t} d\bar{\omega}. \quad (6.8)$$

Ligning (6.7) gir Fouriertransformasjonen, $P(\bar{\omega})$, av funksjonen $p(t)$, og ligning (6.8) er den inverse Fouriertransformasjon av $p(t)$. Bemerk at faktoren $\frac{1}{2\pi}$ kan flyttes fra (6.8) til (6.7) uten at det påvirker resultatene.

Gjennomgangen ovenfor baserte seg mer på logiske resonnement enn på stringent matematikk. Derfor kom det ikke tydelig frem at følgende må gjelde for at ligningene ovenfor skal være gyldige [21]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(t)| dt < \infty.$$

6.3 Sammenheng mellom last og respons

I dette avsnittet utledes funksjoner som forenkler beregningen av responsen til et lineært elastisk system. Først finnes forskyvningen $u(t)$ ut ifra belastningen $p(t)$, og etterpå utledes sammenhengen mellom Fouriertransformasjonene til begge, altså sammenhengen mellom $U(\bar{\omega})$ og $P(\bar{\omega})$.

For et lineært elastisk system, vil den stasjonære responsen til en harmonisk belastning,

$$p(t) = p_0 \sin(\bar{\omega} t) = p_0 \operatorname{Im}[e^{i\bar{\omega} t}],$$

være harmonisk med samme periode, dvs. [8]

$$u(t) = u_0 \sin(\bar{\omega} t - \phi). \quad (6.9)$$

Nå definerer vi frekvensresponsfunksjonen $H(\bar{\omega})$ som

$$H(\bar{\omega}) = A(\bar{\omega}) + i B(\bar{\omega}), \quad \text{der} \quad \sqrt{A(\bar{\omega})^2 + B(\bar{\omega})^2} = \frac{u_0}{p_0} \quad \text{og} \quad \frac{A(\bar{\omega})}{B(\bar{\omega})} = \tan \phi.$$

Ved å sette dette inn i ligning (6.9) fås

$$u(t) = p_0 \sqrt{A(\bar{\omega})^2 + B(\bar{\omega})^2} \sin(\bar{\omega} t - \arctan \frac{A(\bar{\omega})}{B(\bar{\omega})}).$$

Det kan forenkles til [21]:

$$\begin{aligned} u(t) &= p_0 (A(\bar{\omega}) \sin(\bar{\omega} t) - B(\bar{\omega}) \cos(\bar{\omega} t)) \\ &= p_0 \operatorname{Im}[(A(\bar{\omega}) - i B(\bar{\omega}))(\cos(\bar{\omega} t) + i \sin(\bar{\omega} t))] \\ &= p_0 \operatorname{Im}[H(\bar{\omega}) e^{i \bar{\omega} t}] \end{aligned}$$

På samme vis fås

$$u(t) = p_0 \operatorname{Re}[H(\bar{\omega}) e^{i \bar{\omega} t}] \quad \text{for} \quad p(t) = p_0 \cos(\bar{\omega} t) = p_0 \operatorname{Re}[e^{i \bar{\omega} t}].$$

Det betyr at dersom $p(t) = p_0 e^{i \bar{\omega} t}$, blir

$$u(t) = H(\bar{\omega}) p_0 e^{i \bar{\omega} t} = H(\bar{\omega}) p(t), \quad (6.10)$$

der det er underforstått at det menes enten den reelle eller komplekse delen av hver side av ligningen.

Frekvensresponsfunksjonen finnes ved å sette ligning (6.10) inn i den dynamiske likevektslikningen:

$$\begin{aligned} m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) &= p(t) \quad \Leftrightarrow \\ (-m \bar{\omega}^2 + c i \bar{\omega} + k) H(\bar{\omega}) &= 1 \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{(k - m \bar{\omega}^2) + i c \bar{\omega}} = \frac{1}{k} \frac{1}{(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}) + i \cdot 2 \xi \frac{\bar{\omega}}{\omega}}. \quad (6.11)$$

Ved hjelp av $H(\bar{\omega})$ kan vi bestemme responsen til et lineært elastisk system utsatt for belastningen $p(t) = p_0 e^{i \bar{\omega} t}$. I det følgende skal vi se på responsen dersom belastningen derimot er gitt som $p(t) = p_0 \delta(t)$, der $\delta(t)$ er diracs deltafunksjon definert ved betingelsene [9]

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{for } t = 0 \\ 0 & \text{for } t \neq 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (6.12)$$

Det medfører at

$$\int_a^b f(t) \delta(t) dt = f(0), \quad \text{for } a < 0 \quad \text{og} \quad b > 0. \quad (6.13)$$

De systemene vi her betrakter er stabile, dempede og i ro før lasten påføres. Derfor er

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt < \infty,$$

så vi kan Fouriertransformere belastningen og responsen. Det gir

$$P(\bar{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_0 \delta(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt = \frac{p_0}{2\pi}. \quad (6.14)$$

$$U(\bar{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt = \frac{p_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt, \quad \text{der } h(t) = \frac{u(t)}{p_0}. \quad (6.15)$$

Funksjonen $h(t)$ kalles impulsresponsfunksjonen, og det ses av ligning (6.15) at den angir forskyvningsforløpet basert på impulslasten $\delta(t)$. Ovenfor ble det nevnt at dersom $p(t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t)$, er $u(t) = u_0 \sin(\bar{\omega}t - \phi)$. Det forklarer at belastningen $p(t) = P(\bar{\omega})d\bar{\omega} e^{i\bar{\omega}t}$ medfører responsen [21]

$$u(t) = U(\bar{\omega})d\bar{\omega} e^{i\bar{\omega}t}. \quad (6.16)$$

Samtidig gir ligning (6.10)

$$u(t) = H(\bar{\omega}) P(\bar{\omega}) d\bar{\omega} e^{i\bar{\omega}t}. \quad (6.17)$$

Ligning (6.16) og (6.17) medfører at

$$U(\bar{\omega}) = H(\bar{\omega}) P(\bar{\omega}). \quad (6.18)$$

Når ligning (6.14) og (6.15) innsettes, får vi

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt &= \frac{p_0}{2\pi} H(\bar{\omega}) \Leftrightarrow \\ H(\bar{\omega}) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Frekvensresponsfunksjonen er altså Fouriertransformasjonen av impulsresponsfunksjonen. Invers Fouriertransformasjon gir dermed

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega}.$$

Responsen til et system utsatt for en generell last, $p(t)$, kan bestemmes fra ligning (6.18) fordi

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega}) P(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \Leftrightarrow \\ u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega}) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt \right) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Dette integralet er ofte ekstremt komplisert, så det er mer hensiktsmessig å beregne responsen ut ifra impulsresponsfunksjonen [21]. For eksempel gir $h(t - \tau)$ responsen til et system ved

tiden t som følge av en enhetsimpuls ved tiden $t = \tau$. Dersom belastningen $p(t)$ betraktes som en kontinuerlig rekke små impulser med intensitet $p(\tau) d\tau$, blir responsen til hver enkelt impuls

$$h(t - \tau) p(\tau) d\tau.$$

Systemet vi betrakter er lineært, så superposisjonsprinsippet gjelder. Den totale responsen er altså lik summen av responsen for hver impuls, hvilket gir

$$u(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) p(\tau) d\tau. \quad (6.21)$$

Før impulsen er systemet i ro, så impulsresponsfunksjonen er lik null for $t < \tau$. Derfor kan den øvre grensen for integrasjonen i ligning (6.21) økes uten at det påvirker resultatet. Dermed får vi

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) p(\tau) d\tau.$$

Ved å innføre variabelen $\theta = t - \tau$ kan uttrykket omskrives til

$$u(t) = \int_{\infty}^{-\infty} h(\theta) p(t - \theta) (-d\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) p(t - \theta) d\theta. \quad (6.22)$$

Dermed har vi funnet en enkel sammenheng mellom last og respons.

6.4 Autokorrelasjon og spektral tetthet

I denne oppgaven er det jordskjelv som er temaet, og dermed blir belastningsforløpet nesten tilfeldig. Det kan derfor betraktes som tilnærmet stokastisk. I dette avsnittet skal vi se på noen sentrale størrelser som beskriver stokastiske prosesser.

Hvis sannsynlighetsfordelingen for en stokastisk prosess, $p(t)$, ikke varierer med tiden, sies den å være stasjonær. For en stasjonær, stokastisk prosess er

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(t)| dt < \infty.$$

Det betyr at vi ikke kan Fouriertransformere $p(t)$ for å benytte ligning (6.20) til å bestemme $u(t)$. Vi kan ikke finne løsningen fra ligning (6.22) heller fordi $p(t)$ er stokastisk. Dette problemet løses ved i stedet å analysere autokorrelasjonen til prosessen $p(t_0)$ [21],

$$R_p(t_0, \tau) = E[p(t_0) p(t_0 + \tau)], \quad (6.23)$$

Bokstaven E på høyre side av likhetstegnet angir at autokorrelasjonen til prosessen er forventningsverdien til produktet av prosessen ved tidspunktene t_0 og $t_0 + \tau$. Siden $p(t)$ er en stasjonær stokastisk prosess, avhenger autokorrelasjonen kun av tidsdifferensen. Ligning (6.23) kan dermed forenkles til

$$R_p(\tau) = E[p(t) p(t + \tau)].$$

Det betyr at autokorrelasjonen ved $\tau = 0$ er lik forventningsverdien til kvadratet av prosessen,

$$R_p(\tau = 0) = E[p(t)^2]. \quad (6.24)$$

Prosesen $p(t)$ er stokastisk, så det er ikke noen sammenheng mellom $p(t_i)$ og $p(t_j)$ dersom $t_i \ll t_j$ eller $t_j \ll t_i$. Derfor vil kvadratet av middelverdien av $p(t)$ være asyptote for autokorrelasjonen,

$$R_p(\tau \rightarrow -\infty) = R_p(\tau \rightarrow \infty) = \bar{p}(t)^2.$$

Siden prosessen er stasjonær, er

$$R_p(\tau) = E[p(t)p(t+\tau)] = E[p(t-\tau)p(t)] = R_p(-\tau),$$

så autokorrelasjonen er symmetrisk om $\tau = 0$. I det følgende vil vi anta at forventningsverdien til $p(t)$ er lik null. Dermed får vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_p(\tau)| d\tau < \infty,$$

hvilket betyr at autokorrelasjonen kan Fouriertransformeres. Det gir

$$S_p(\bar{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_p(\tau) e^{-i\bar{\omega}\tau} d\tau \Leftrightarrow \quad (6.25)$$

$$R_p(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_p(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}\tau} d\bar{\omega}. \quad (6.26)$$

Den spektrale tettheten, $S_p(\bar{\omega})$, angir hvilke frekvenser som er dominerende i prosessen. Den kanskje viktigste egenskapen til den spektrale tetthetsfunksjonen er at

$$E[p(t)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_p(\bar{\omega}) d\bar{\omega}. \quad (6.27)$$

Den sammenhengen fremkommer ved å sette $\tau = 0$ i ligning (6.26) og benytte ligning (6.24) [21].

Dersom vi kan finne den spektrale tettheten til responsen $u(t)$, kan vi altså også finne forventningsverdien til kvadratet av responsen. For prosesser med forventning $E[p(t)] = 0$, er det prosessens varians. Det benytter vi i avsnitt 6.5. Utledningen av den spektrale tettheten til $u(t)$ på grunn av lasten $p(t)$ bygger på at $S_u(\bar{\omega})$ er den Fouriertransformerte av $R_u(\tau)$. Det betyr at vi begynner med uttrykket

$$E[u(t)u(t+\tau)].$$

Ligning (6.22) innsettes:

$$\begin{aligned} E[u(t)u(t+\tau)] &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1)p(t-\theta_1)d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_2)p(t+\tau-\theta_2)d\theta_2\right] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1)h(\theta_2)p(t-\theta_1)p(t+\tau-\theta_2)d\theta_1 d\theta_2\right]. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Prosesen $p(t)$ er stasjonær, hvilket betyr at

$$E[p(t-\theta_1)p(t+\tau-\theta_2)] = R_p(\tau-\theta_2+\theta_1). \quad (6.29)$$

Innsatt i ligning (6.28) gir ligning (6.29)

$$E[u(t) u(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1) h(\theta_2) R_p(\tau - \theta_2 + \theta_1) d\theta_1 d\theta_2,$$

som er uavhengig av t . Altså er responsen til en stasjonær prosess også stasjonær, og autokorrelasjonen er gitt som

$$R_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1) h(\theta_2) R_p(\tau - \theta_2 + \theta_1) d\theta_1 d\theta_2.$$

Den spektrale tettheten finnes ved hjelp av Fouriertransformasjon:

$$\begin{aligned} S_u(\bar{\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1) h(\theta_2) R_p(\tau - \theta_2 + \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 e^{-i\bar{\omega}\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1) \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_2) \int_{-\infty}^{\infty} R_p(\tau - \theta_2 + \theta_1) e^{-i\bar{\omega}\tau} d\tau d\theta_2 d\theta_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1) \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_2) \int_{-\infty}^{\infty} R_p(v) e^{-i\bar{\omega}(v+\theta_2-\theta_1)} dv d\theta_2 d\theta_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1) \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_2) e^{i\bar{\omega}(\theta_1-\theta_2)} \int_{-\infty}^{\infty} R_p(v) e^{-i\bar{\omega}v} dv d\theta_2 d\theta_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1) e^{i\bar{\omega}\theta_1} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_2) e^{-i\bar{\omega}\theta_2} 2\pi S_p(\bar{\omega}) d\theta_2 d\theta_1, \end{aligned}$$

der ligning (6.25) er benyttet i løsningen av integralet. Dobbelintegralene er internt uavhengige, så resultatet er produktet av de to [21]. Ved å sette inn ligning (6.19) gir det

$$S_u(\bar{\omega}) = H^*(\bar{\omega}) H(\bar{\omega}) S_p(\bar{\omega}) = |H(\bar{\omega})|^2 S_p(\bar{\omega}). \quad (6.30)$$

For den dynamiske likevektsligningen er frekvensresponsfunksjonen gitt i ligning (6.11), og kvadratet av absoluttverdien til denne er vist i figur 6.1 for aktuelle dempningsforhold. Ligning (6.11) innsettes i ligning (6.30), og dermed oppnås den spektrale tettheten til responsen til et system utsatt for en stasjonær belastning,

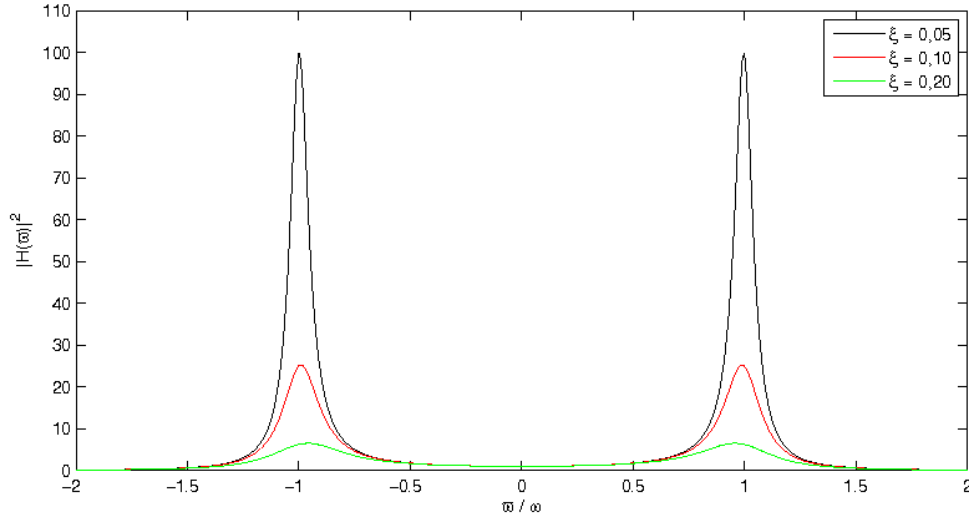
$$S_u(\bar{\omega}) = \frac{S_p(\bar{\omega})}{(k - m\bar{\omega}^2)^2 + c^2\bar{\omega}^2}. \quad (6.31)$$

Det uttrykket skal vi benytte til å finne generelle tendenser for responsen til systemer utsatt for jordskjelv.

6.5 Responsen til hvit støy

Som nevnt i avsnitt 4.3, er grunnakselerasjonen i forbindelse med et jordskjelv vanligvis langvarig og ekstremt uregelmessig. Det er ikke noen sammenheng mellom $\ddot{u}_g(t)$ og $\ddot{u}_g(t + \Delta t)$, nesten uansett hvor liten Δt måtte være. Det betyr at belastningen i forbindelse med et jordskjelv er tilnærmet lik hvit støy, som per definisjon har konstant spektral tetthet,

$$S_p(\bar{\omega}) = S_0. \quad (6.32)$$



Figur 6.1: Kvadratet av absoluttverdien til frekvensresponsfunksjonen til den dynamiske likevektsligningen, $|H(\bar{\omega})|^2$, for tre dempningsforhold. Stivheten, k , er lik for alle systemene. Scriptfilen til Matlab er vedlagt i tillegg [B.1](#)

Ut fra ligning (6.32) skal vi nå vise to viktige egenskaper til forskyvningsforløpet. Ligning (6.26) gir autokorrelasjonen for belastningsprosessen som tilsvarer hvit støy [21],

$$\begin{aligned}
 R_p(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{i\bar{\omega}\tau} d\bar{\omega} \\
 &= S_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\bar{\omega}\tau) + i \sin(\bar{\omega}\tau) d\bar{\omega} \\
 &= S_0 \left(\lim_{\bar{\omega} \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(\bar{\omega}\tau)}{\tau} - \frac{i \cos(\bar{\omega}\tau)}{\tau} \right) - \lim_{\bar{\omega} \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sin(\bar{\omega}\tau)}{\tau} - \frac{i \cos(\bar{\omega}\tau)}{\tau} \right) \right) \\
 &= 2 S_0 \lim_{\bar{\omega} \rightarrow \infty} \frac{\sin(\bar{\omega}\tau)}{\tau}.
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Grenseverdien i ligning (6.33) er lik $\pi \delta(\tau)$ [21], der $\delta(\tau)$ er diracs deltafunksjon som er gitt i ligning (6.12). Innsatt i ligning (6.33) gir det

$$R_p(\tau) = 2 \pi S_0 \delta(\tau). \tag{6.34}$$

Det blir tydelig at uttrykket i ligning (6.34) er korrekt når det settes inn i ligning (6.25),

$$S_p(\bar{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \pi S_0 \delta(\tau) e^{-i\bar{\omega}\tau} d\tau = S_0 e^{-i\bar{\omega} \cdot 0} = S_0,$$

der ligning (6.13) er benyttet i den siste overgangen. Siden ligning (6.34) gir $R_p(\tau \neq 0) = 0$, er det ingen korrelasjon for belastningsforløpet.

Den spektrale tettheten til forskyvningsforløpet finnes ved innsetting av ligning (6.32) i ligning (6.31),

$$S_u(\bar{\omega}) = \frac{S_0}{(k - m \bar{\omega}^2)^2 + c^2 \bar{\omega}^2}. \tag{6.35}$$

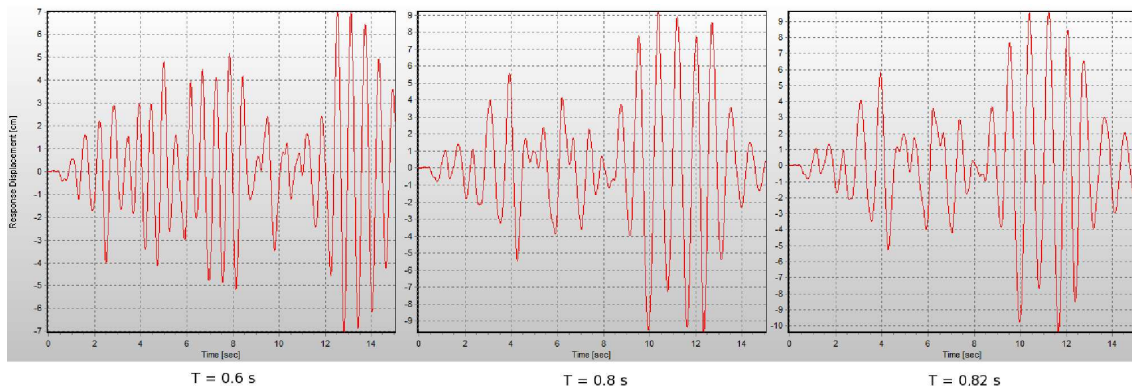
Herav kan det trekkes to viktige slutninger. For det første er variansen til responsen gitt av ligning (6.27) [21],

$$E[u(t)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_0}{(k - m\bar{\omega}^2)^2 + c^2\bar{\omega}^2} d\bar{\omega} = \frac{\pi S_0}{kc} = \frac{\pi S_0}{2m^2\omega^3\xi}. \quad (6.36)$$

Ut fra konklusjonene våre i kapittel 5, se f.eks. figur 5.8, er det ikke overraskende at systemer med stor dempning har mindre varians. Men ligning (6.36) viser også at størrelsen på variansen til responsen avhenger i stor grad av den naturlige vinkelfrekvensen til systemet. Variansen er større for et system med liten naturlig vinkelfrekvens, og dermed er sannsynligheten for store utslag også større. Vi er generelt mest interessert i maksimalverdien til responsen, og denne vil altså i henhold til ligning (6.36) vanligvis være større for et system med lang naturlig svingeperiode enn for et system med kort naturlig svingeperiode [19]. For et system med flere frihetsgrader, som analyseres med modal analyse, medfører det at de første modene, som i henhold til ligning (3.23) har minst naturlig vinkelfrekvens, generelt vil bidra mer til responsen enn de siste. Det er derfor vanligvis tilstrekkelig kun å betrakte den første brøkdelen av svingeformene til en konstruksjon med mange frihetsgrader [8, 9]. Dette benyttes i både NS 3491-12 og eurokoden, og det forsvarer analyse basert på generaliserte en-frihetsgradsystemer, se avsnitt 3.4. Men det kan trekkes enda en avgjørende konklusjon fra ligning (6.35). Det skyldes at den maksimale verdien av $S_u(\bar{\omega})$ som nevnt under ligning (6.26), opptrer ved den frekvensen som er dominerende for responsen. Av ligning (6.35) ses det at den dominerende frekvensen til forskyvningen for små dempningsforhold er tilnærmet lik kvadratroten av stivheten delt på massen. Konstruksjonene denne oppgaven omhandler, har små dempningsforhold (under 10 %). Det betyr at den dominerende frekvensen for disse konstruksjonene er tilnærmet lik den naturlige vinkelfrekvensen til systemet [21], for

$$\bar{\omega}_{dominerende} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega.$$

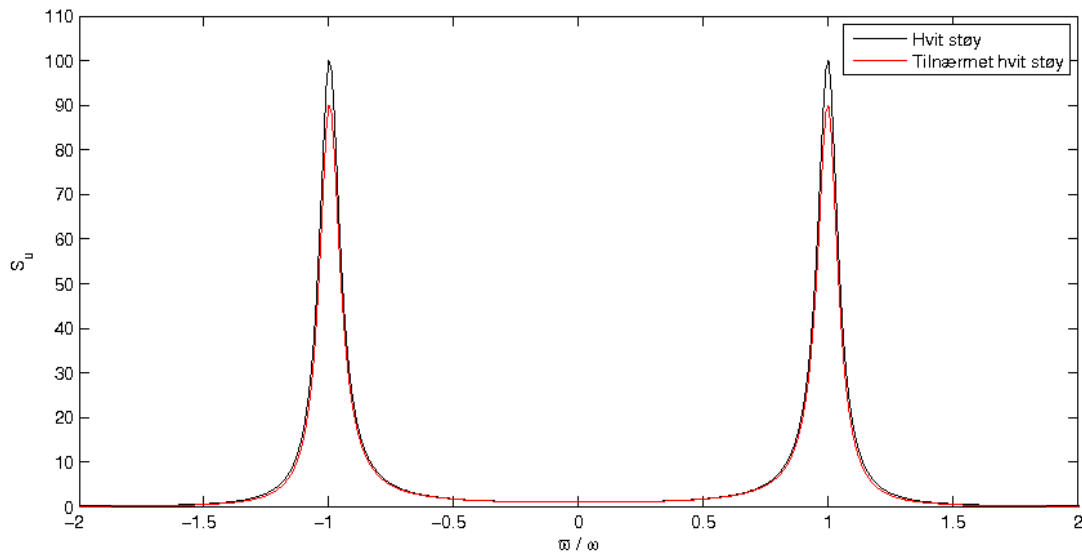
Dette er illustrert i figur 6.2. Den viser tidshistorien til tre systemer utsatt for et grunnakselerasjonsforløp som er svært lik hvit støy. Dempningsforholdet er satt til 5 % fordi det er representativt for systemene denne oppgaven fokuserer på. I figuren kommer det frem at svingeperioden til forskyvningen av hvert system er svært lik den naturlige svingeperioden til systemet. Som en konsekvens



Figur 6.2: Forskyvning av et en-frihetsgradsystem med $T = 0.6 \text{ s}^{-1}$, 0.8 s^{-1} og 0.82 s^{-1} utsatt for grunnakselerasjonen vist i figur 5.11 med $\xi = 0.05$. Det ses at den dominerende frekvensen er tilnærmet lik den naturlige vinkelfrekvensen for hvert system

av dette, har systemene med $T = 0.8 \text{ s}^{-1}$ og $T = 0.82 \text{ s}^{-1}$ sine maksimale utslag nesten samtidig, mens systemet med $T = 0.6 \text{ s}^{-1}$ når sitt ekstremum senere. I avsnitt 6.6 skal vi se at dette er av stor betydning ved responspekteranalyse. Dersom de tre forskyvningsforløpene representerte de tre første modene i en modal analyse der lastvirkningene skulle bestemmes ved responspekteranalyse, måtte det tas hensyn til at de to første modene nesten er i fase. Det måtte med andre ord tas hensyn til korrelasjonen mellom modene med tilnærmet lik egensvingeperiode.

Grunnakselerasjonen i forbindelse med et jordskjelv er som nevnt kun nesten lik hvit støy, så den spektrale tettheten til belastningen er ikke helt konstant. Det forbeholdet har liten konsekvens for resultatene fordi de bygger på den spektrale tettheten til responsen som er gitt i ligning (6.30) og (6.31). Dersom $S_p(\bar{\omega})$ varierer langsomt med $\bar{\omega}$, påvirker det nesten ikke $S_u(\bar{\omega})$ da frekvensresponsfunksjonen har svært store utslag i området som har størst innflytelse på responsen. Figur 6.3 viser den spektrale tettheten til to systemer med $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$ og $\xi = 0.05$. Det ene er utsatt for hvit støy, mens den spektrale tettheten til belastningen på det andre kun er tilnærmet konstant. Det ses at $S_u(\bar{\omega})$ er nesten identisk for de to systemene. Derfor er prinsippene som er utledt i dette avsnittet, gyldige for systemer utsatt for langvarig, irregulær grunnakselerasjon.



Figur 6.3: Den spektrale tettheten til forskyvningsforløpet, $S_u(\bar{\omega})$, for et system med $k = 1$ og $\xi = 0.05$ utsatt for hvit støy og tilnærmet hvit støy. I tilfellet med hvit støy er $S_p(\bar{\omega}) = 1$. I tilfellet med tilnærmet hvit støy er $S_p(\bar{\omega}) = (1 - 0.1 \bar{\omega}^2)$. Vi ser at $S_u(\bar{\omega})$ er nesten identisk for de to systemene. Scriptfilen til Matlab er vedlagt i tillegg B.2

6.6 Kombinasjonsmetoder

I dette avsnittet skal vi utlede en forenklet metode som gir den maksimale responsen til et lineært elastisk system utsatt for et jordskjelv. Den er, i motsetning til tidshistorieanalysen, ikke eksakt, men den er til gjengjeld mye mindre tidkrevende. Resultatet er en enkel sammenheng mellom den

maksimal responsen til hver mode og den totale responsen. I utledningen må det gjøres følgende antakelser [18]:

- Grunnakselerasjonen er en stokastisk prosess som minner om hvit støy. Den er stasjonær, normalfordelt og har forventningsverdi null. Det betyr at $S_{\ddot{u}_g}(\bar{\omega})$ er tilnærmet konstant
- Varigheten av grunnakselerasjonen er vesentlig lengre enn den første egensvingeperioden til systemet
- Systemet er klassisk dempet med et dempningsforhold som er mindre enn 10 % av kritisk dempning
- Forholdet $\frac{\omega_l}{\omega_j}$ er mindre enn ti for alle modene med stor innvirkning på responsen

Den tredje, og i de fleste tilfellene også den fjerde, forutsetningen er innfridd for systemene som behandles i denne oppgaven. De to første er derimot årsak til avvik.

Som vist i ligning (3.34), kan responsen til et lineært elastisk system til enhver tid beskrives som summen av responsen til hver mode,

$$r(t) = \sum_{k=1}^n r_k(t) = \sum_{k=1}^n r_k^{st} \omega_k^2 D_k(t) = \sum_{k=1}^n r_k^{st} \omega_k^2 \frac{M_k}{L_k} q_k(t), \quad (6.37)$$

der $q_k(t)$ er gitt av ligning (3.29) som gjentas her:

$$\ddot{q}_k(t) + 2\omega_k \xi_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = -\frac{L_k}{M_k} \ddot{u}_g(t).$$

Det kan vises, at den maksimale responsen til en mode i løpet av jordskjelvet er proporsjonal med gjennomsnittet av kvadratet av responsen [9],

$$|q_k(t)|_{maks} = A_k \sqrt{E[q_k(t)^2]} \quad (6.38)$$

Faktoren A_k avhenger av forholdet $\frac{t_d \omega_k}{2\pi}$, der t_d er jordskjelvets varighet. Når forholdet mellom de naturlige vinkelfrekvensene ikke er i størrelsesordenen $\omega_i > 10 \omega_j$, er A_k tilnærmet konstant. Dette har vi antatt er innfridd, så vi kan forenkle ligning (6.38) til

$$|q_k(t)|_{maks} = A \sqrt{E[q_k(t)^2]}. \quad (6.39)$$

Det antas at relasjonen også gjelder for kryssledd i responsen, altså for $E[q_j(t) q_l(t)]$ [9]. Dermed kan vi finne den maksimale verdien av responsen fra ligning (6.37) og (6.39),

$$\begin{aligned} |r(t)|_{maks} &= A \sqrt{E \left[\left(\sum_{k=1}^n r_k^{st} \omega_k^2 \frac{M_k}{L_k} q_k(t) \right)^2 \right]} \\ &= A \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n r_j^{st} r_l^{st} \omega_j^2 \omega_l^2 \frac{M_j}{L_j} \frac{M_l}{L_l} E[q_j(t) q_l(t)]}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Gjennomsnittet av produktet av vektallene i løpet av jordskjelvet, $E[q_j(t) q_l(t)]$, beregnes som

$$E[q_j(t) q_l(t)] = \frac{1}{t_d} \int_0^{t_d} q_j(t) q_l(t) dt. \quad (6.41)$$

Integralet løses ved først å Fouriertransformere $q_k(t)$, og deretter transformere tilbake. Ligning (3.29) og (6.18) gir

$$Q_k(\bar{\omega}) = -\frac{L_k}{M_k} H_k(\bar{\omega}) \ddot{U}_g(\bar{\omega}).$$

Ligning (6.8) benyttes, der vi utnytter at faktoren $\frac{1}{2\pi}$ kan flyttes fra ligning (6.7) til ligning (6.8) uten konsekvens for resultatet. Dermed blir

$$q_k(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_k}{M_k} H_k(\bar{\omega}) \ddot{U}_g(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega}. \quad (6.42)$$

Frekvensresponsfunksjonen $H_k(\bar{\omega})$ er gitt i ligning (6.11) som

$$H_k(\bar{\omega}) = \frac{1}{K_k} \frac{1}{(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_k^2}) + i 2 \xi \frac{\bar{\omega}}{\omega_k}}.$$

Det er her antatt at dempningsforholdet er likt i alle modene. Det er tre grunner til denne antakelsen. For det første er det mest vanlig, for det andre gjør det uttrykkene i utledningen enklere, og for det tredje endrer det ikke prosedyren for utledningen. For resultater med modeavhengig dempning, se [8, 9].

Integralet i ligning (6.42) kan tilnærmet skrives som en sum,

$$q_k(t) \approx -\frac{L_k}{2\pi M_k} \Delta\bar{\omega} \sum_{a=-\infty}^{\infty} H_k(a \Delta\bar{\omega}) \ddot{U}_g(a \Delta\bar{\omega}) e^{i a \Delta\bar{\omega} t}.$$

Innsatt i ligning (6.41) gir det

$$\begin{aligned} E[q_j(t) q_l(t)] &= \frac{1}{t_d} \int_0^{t_d} q_j(t) q_l(t) dt \\ &\approx \frac{1}{t_d} \int_0^{t_d} \left(-\frac{L_j}{2\pi M_j} \Delta\bar{\omega} \sum_{a=-\infty}^{\infty} H_j(a \Delta\bar{\omega}) \ddot{U}_g(a \Delta\bar{\omega}) e^{i a \Delta\bar{\omega} t} \right) \\ &\quad \left(-\frac{L_l}{2\pi M_l} \Delta\bar{\omega} \sum_{b=-\infty}^{\infty} H_l(b \Delta\bar{\omega}) \ddot{U}_g(b \Delta\bar{\omega}) e^{i b \Delta\bar{\omega} t} \right) dt \\ &= \frac{L_j L_l (\Delta\bar{\omega})^2}{4\pi^2 t_d M_j M_l} \sum_{a=-\infty}^{\infty} \sum_{b=-\infty}^{\infty} H_j(a \Delta\bar{\omega}) H_l(b \Delta\bar{\omega}) \ddot{U}_g(a \Delta\bar{\omega}) \ddot{U}_g(b \Delta\bar{\omega}) \int_0^{t_d} e^{i(a+b)\Delta\bar{\omega} t} dt. \end{aligned} \quad (6.43)$$

I figur 6.1 ses det at $H_k(\bar{\omega} \neq \omega_k) \approx 0$ for små dempningsforhold. Vi har antatt at $\xi < 0.1$, og derfor kan ligning (6.43) løses med hensyn på

$$a \Delta\bar{\omega} = \omega_j \quad \text{og} \quad b \Delta\bar{\omega} = \omega_l \quad (6.44)$$

uten stort tap av nøyaktighet. Det er forutsatt at varigheten til jordskjelvet er vesentlig lengre enn den lengste egensvingeperioden til systemet, hvilket medfører at [9]

$$\int_0^{t_d} e^{i\omega_j t + i\omega_l t} dt \approx \begin{cases} 0 & \text{for } j \neq -l \\ 1 & \text{for } j = -l \end{cases} \quad (6.45)$$

Ligning (6.44) og (6.45) innsettes i ligning (6.43):

$$E[q_j(t) q_l(t)] \approx \frac{L_j L_l (\Delta\bar{\omega})^2}{4 \pi^2 t_d M_j M_l} \sum_{a=-\infty}^{\infty} H_j(a \Delta\bar{\omega}) H_l^*(a \Delta\bar{\omega}) \ddot{U}_g(a \Delta\bar{\omega}) \ddot{U}_g^*(a \Delta\bar{\omega}).$$

Uttrykket konverteres tilbake til kontinuerlig form,

$$E[q_j(t) q_l(t)] \approx \frac{L_j L_l}{4 \pi^2 t_d M_j M_l} \int_{-\infty}^{\infty} H_j(\bar{\omega}) H_l^*(\bar{\omega}) |\ddot{U}_g(\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega}. \quad (6.46)$$

Som vist i figur 6.1, er $|H_k(\bar{\omega})|$ ved lave dempningsforhold neglisjerbar for verdier av $\bar{\omega}$ som ikke er tilnærmet lik den naturlige vinkelfrekvensen til systemet, ω_k . De naturlige vinkelfrekvensene til modene ω_j og ω_l må altså være tilnærmet like for at høyre side av ligning (6.46) ikke skal være neglisjerbar. Dersom de er det, overlapper områdene med betydelige verdier hverandre, og intervallet som er avgjørende for resultatet, er $\omega_j \leq \bar{\omega} \leq \omega_l$ for $\omega_j \leq \omega_l$. Dette intervallet er så smalt at den Fouriertransformerte av grunnakselerasjonsforløpet kan betraktes som tilnærmet konstant, $|\ddot{U}_g(\bar{\omega})|^2 \approx |\ddot{U}_g(\omega_j)| |\ddot{U}_g(\omega_l)|$ [9]. Innsatt i ligning (6.46) gir det

$$E[q_j(t) q_l(t)] \approx \frac{L_j L_l |\ddot{U}_g(\omega_j)| |\ddot{U}_g(\omega_l)|}{4 \pi^2 t_d M_j M_l} \int_{-\infty}^{\infty} H_j(\bar{\omega}) H_l^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega},$$

hvis løsning er [9]

$$E[q_j(t) q_l(t)] \approx \frac{\pi L_j L_l C_{jl}}{2 K_j K_l M_j M_l} \frac{\sqrt{\omega_j \omega_l}}{\xi} \rho_{jl}, \quad (6.47)$$

der

$$C_{jl} = \frac{|\ddot{U}_g(\omega_j)| |\ddot{U}_g(\omega_l)|}{4 \pi^2 t_d}, \quad \omega_j \leq \omega_l \quad \text{og} \quad \rho_{jl} = \frac{8 \xi^2 (1 + \frac{\omega_j}{\omega_l}) (\frac{\omega_j}{\omega_l})^{3/2}}{(1 - (\frac{\omega_j}{\omega_l})^2)^2 + 4 \xi^2 \frac{\omega_j}{\omega_l} (1 + \frac{\omega_j}{\omega_l})^2}. \quad (6.48)$$

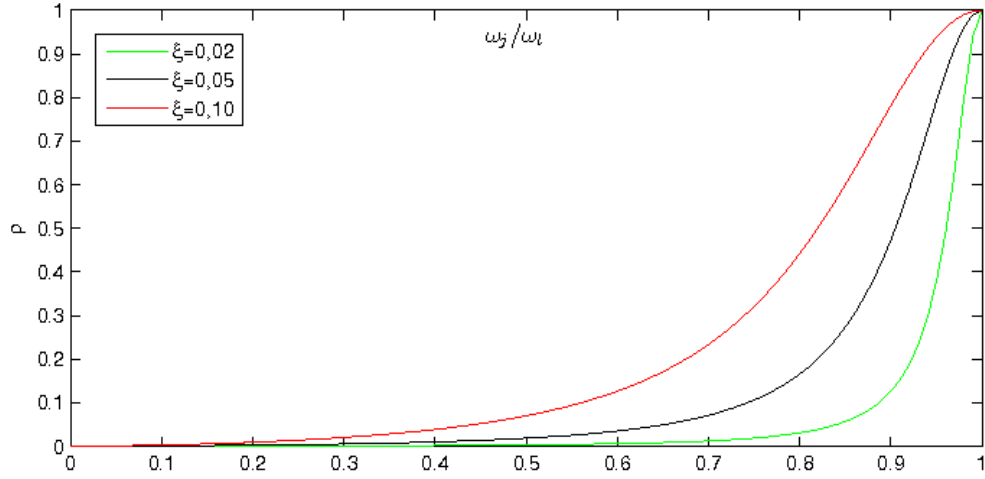
Korrelasjonskoeffisienten ρ_{jl} er vist i figur 6.4 for ulike dempningsforhold. Det ses av den alltid er lik en for $\omega_j = \omega_l$, og at den reduseres hurtigt når forholdet mellom de to naturlige vinkelfrekvensene nærmer seg null. Det ses også at korrelasjonskoeffisienten øker med økt dempningsforhold.

For tilfellet der $j = l$ gir ligning (6.47)

$$E[q_j(t)^2] \approx \frac{\pi L_j^2 C_{jj}}{2 K_j^2 M_j^2} \frac{\omega_j}{\xi},$$

hvilket medfører at

$$\sqrt{E[q_j(t)^2]} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{C_{jj}} \frac{|L_j|}{K_j M_j} \sqrt{\frac{\omega_j}{\xi}}. \quad (6.49)$$



Figur 6.4: Korrelasjonskoeffisienten ρ_{jl} for $\xi = 0.02$, $\xi = 0.05$ og $\xi = 0.10$. Scriptfilen til Matlab er vedlagt (B.3)

Tallverdien av L_j fremkommer fordi L_j i motsetning til M_j og K_j ikke per definisjon er positiv. Ligning (6.49) føres nå inn i ligning (6.47), hvilket gir

$$E[q_j(t) q_l(t)] \approx \frac{C_{jl}}{\sqrt{C_{jj}} \sqrt{C_{ll}}} \frac{L_j L_l}{|L_j| |L_l|} \rho_{jl} \sqrt{E[q_j(t)^2]} \sqrt{E[q_l(t)^2]}.$$

For $j = l$ er forholdet $C_{jl}/(\sqrt{C_{jj}} \sqrt{C_{ll}})$ lik en, og for $\omega_j \approx \omega_l$ er det nesten lik en. For tilfellene der $\omega_j \not\approx \omega_l$, er kryssleddets bidrag til responsen neglisjerbart fordi $\rho_{jl} \approx 0$. Derfor medfører det kun mindre unøyaktigheter generelt å sette $C_{jl}/(\sqrt{C_{jj}} \sqrt{C_{ll}}) = 1$, hvilket gir

$$E[q_j(t) q_l(t)] \approx \frac{L_j L_l}{|L_j| |L_l|} \rho_{jl} \sqrt{E[q_j(t)^2]} \sqrt{E[q_l(t)^2]}.$$

Ligning (6.39) innsettes,

$$E[q_j(t) q_l(t)] \approx \frac{1}{A^2} \frac{L_j L_l}{|L_j| |L_l|} \rho_{jl} |q_j(t)|_{maks} |q_l(t)|_{maks}.$$

Det betyr at ligning (6.40) kan forenkles til

$$\begin{aligned} |r(t)|_{maks} &= A \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n r_j^{st} r_l^{st} \omega_j^2 \omega_l^2 \frac{M_j}{L_j} \frac{M_l}{L_l} \frac{1}{A^2} \frac{L_j L_l}{|L_j| |L_l|} \rho_{jl} |q_j(t)|_{maks} |q_l(t)|_{maks}} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \rho_{jl} r_j^{st} r_l^{st} \omega_j^2 \omega_l^2 \frac{M_j}{|L_j|} \frac{M_l}{|L_l|} |q_j(t)|_{maks} |q_l(t)|_{maks}} \end{aligned} \quad (6.50)$$

Fra ligning (3.30), (5.3) og (5.4) vet vi at

$$S_e(T_k) = \omega_k^2 \frac{M_k}{|L_k|} |q_k(t)|_{maks}. \quad (6.51)$$

Det innsettes i ligning (6.50), hvilket gir

$$|r(t)|_{maks} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \rho_{jl} r_j^{st} r_l^{st} S_e(T_j) S_e(T_l)} \quad (6.52)$$

Ligning (3.34) innføres, og vi benytter notasjonen $r_{k \text{ ekstremum}} = r_k^{st} S_e(T_k)$ [9]. Det gir

$$|r(t)|_{maks} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \rho_{jl} r_{j \text{ ekstremum}} r_{l \text{ ekstremum}}}. \quad (6.53)$$

Det er nettopp ekstremumsverdien til responsen vi finner ved beregning på grunnlag av et responspekter, så ligning (6.53) kan løses uten bruk av tidshistorieanalyse.

Formelen i ligning (6.53) kalles komplett kvadratisk kombinasjon, eller CQC som er den engelske forkortelsen for Complete Quadratic Combination. Det finnes en enklere utgave av denne der kryssleddene negliseres. Den kalles kvadratrotten av summen av kvadratene, forkortet SRSS. Kombinasjonsuttrykket er

$$|r(t)|_{maks} = \sqrt{\sum_{k=1}^n r_{k \text{ ekstremum}}^2}.$$

Det er legitimt å benytte SRSS i stedet for CQC når [18]

$$\frac{\omega_j}{\omega_l} < \frac{0.1}{\xi + 0.1}, \quad \omega_j < \omega_l, \quad (6.54)$$

som tilnærmet svarer til $\rho_{jl} < 0.1$. Argumentet for å bruke SRSS i stedet for CQC er enkelthet. Dersom modenes respons kombineres ved hjelp av et dataprogram, er reduksjonen i beregningstid liten [15]. Derfor velges CQC vanligvis ved prosjektering. I forbindelse med utledninger av generelle prinsipper kan det derimot forenkle prosessen vesentlig å benytte SRSS. Det skal vi se et eksempel på i avsnitt 6.7.

Som nevnt i begynnelsen av dette avsnittet, er responsen som oppnås ved CQC eller SRSS best for grunnakselerasjoner som er tilnærmet stasjonære, normalfordelte og lik hvit støy. Denne skal helst virke på et system med lett dempning og egensvingeperioder som er vesentlig kortere enn varigheten til jordskjelvet [18]. Trass i disse forutsetningene er responspekteranalyse mye mer brukt enn tidshistorieanalyse. Årsaken er hovedsakelig tidsbesvarelsen. Samtidig kan det forsvares å benytte en analysemetode som ikke er eksakt, fordi det generelt er store usikkerheter knyttet til jordskjelvsbelastning. Det er ikke mulig å forutsi nøyaktig hvordan responspektret til et fremtidig jordskjelv vil se ut, og derfor heller ikke hvordan belastningen på en gitt konstruksjon vil bli. Derfor er mindre avvik i analysemetoden akseptable.

6.7 Respons ved grunnakselerasjon i flere retninger samtidig

Dersom en lineært elastisk konstruksjon utsettes for grunnakselerasjon i to ortogonale retninger samtidig, x - og y -retning, vil den totale responsen i et gitt punkt i konstruksjonen til enhver tid

være gitt av superposisjonsprinsippet,

$$r(t) = r_x(t) + r_y(t). \quad (6.55)$$

I ligning (6.55) er $r_x(t)$ responsen, f. eks. momentet i en gitt bjelke, fra grunnakselerasjonen i x -retning. På samme vis er $r_y(t)$ responsen, dvs. momentet i den samme bjelken, fra grunnakselerasjonen i y -retning. Den maksimale responsen finnes ved bruk av SRSS. Vi velger SRSS fordi det er enklere enn CQC og kryss-korrelasjonen mellom de to responsene generelt er liten [9]. Resultatet blir

$$|r(t)|_{max} = \sqrt{|r_x(t)|_{max}^2 + |r_y(t)|_{max}^2}. \quad (6.56)$$

I avsnitt 4.2 ble det nevnt at grunnakselerasjonen i sekundærretningen vanligvis er tilnærmet 0.85 ganger størrelsen på grunnakselerasjonen i hovedretningen. Dersom x -retningen er hovedretningen gir det

$$S_{e,y}(t, T, \xi) \approx 0.85 S_{e,x}(t, T, \xi). \quad (6.57)$$

Forholdet mellom innvirkningen som grunnakselerasjonen i de to retningene har på den totale responsen, avhenger av grunnakselerasjonsforløpet, typen respons og hvor i konstruksjonen responsen søkes. Ligning (6.57) forutsetter at forløpet til grunnakselerasjonen i hver hovedretning er lik bortsett fra faktoren 0.85. Det betyr at forholdet mellom grunnakselerasjonenes innflytelse i de to retningene kun avhenger av hvilken respons vi søker. I tillegg der responsen vi søker er momentet i en bjelke, er forholdet hovedsaklig avhengig av bjelkens plassering (vinkel i forhold til hovedretningene) i bygget. Det vil være konstant og benevnes her B , slik at $r_y(t) = B r_x(t)$. I et dobbeltsymmetrisk bygg er $B = 0$ for de avstivende komponenter. Derfor kan disse analyseres ved hjelp av todimensjonale modeller. Innsatt i ligning (6.56) gir $r_y(t) = B r_x(t)$ sammen med ligning (6.57)

$$|r(t)|_{max} = \sqrt{|r_x(t)|_{max}^2 + (0.85 B |r_x(t)|_{max})^2} = |r_x(t)|_{max} \sqrt{1 + 0.7225 B}. \quad (6.58)$$

Den største responsen oppstår når den største grunnakselerasjonen virker i den hovedretningen som gir størst bidrag til responsen. Derfor må $0 \leq B \leq 1$ [9].

Nå sammenliknes ligning (6.58) med kombinasjonene i de gjeldende regelverk i Norge. I NS 3491-12 punkt 4.6 og NS-EN 1998-1 punkt 4.3.3.5.1(3) er følgende kombinasjonsregel for lastvirkningene gitt:

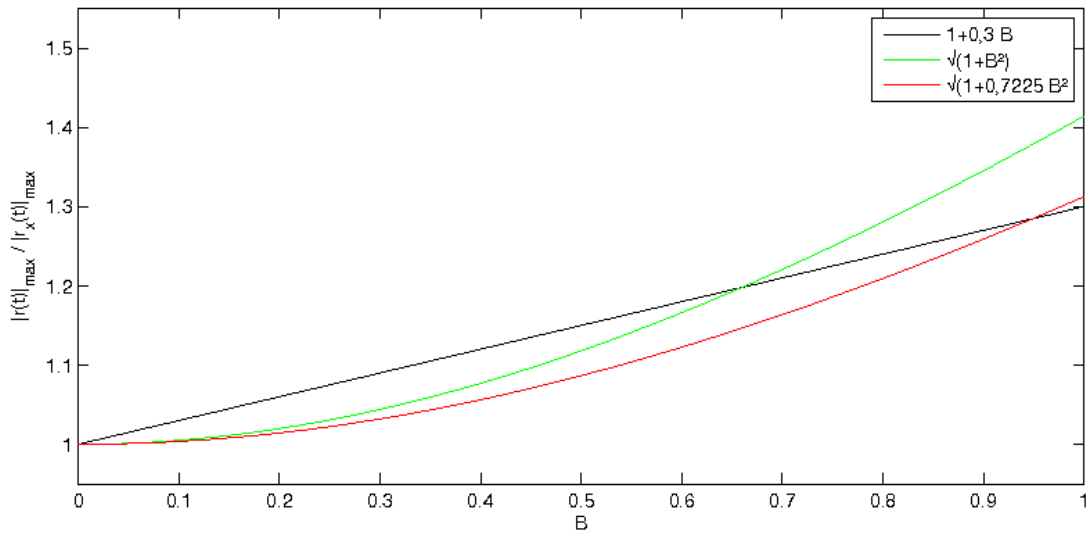
$$E_{dx} \text{ " + " } 0.3 E_{dy}, \quad (6.59)$$

der " + " betyr kombineres med. Her beregnes responsen i x - og y -retning ut ifra det samme responsspektret, så ligning (6.59) medfører at

$$r(t) = r_x(t) + 0.3 r_y(t) = r_x(t)(1 + 0.3 B) \quad \Leftrightarrow$$

$$|r(t)|_{max} = |r_x(t)|_{max} (1 + 0.3 B). \quad (6.60)$$

Figur 6.5 viser forholdet mellom den totale responsen og responsen til grunnakselerasjon i hovedretningen som funksjon av B . Det ses at uttrykket i regelverket, ligning (6.60), generelt er mer konservativt enn uttrykket i ligning (6.58).



Figur 6.5: Forholdet mellom den totale responsen og responsen til grunnakselerasjon i hovedretningen som funksjon av B . Forholdet er vist i henhold til både gjeldende regelverk og teorien om at grunnakselerasjonen i sekundærretningen er lik den i hovedretningen multiplisert med 0,85. Scriptfilen til Matlab er vedlagt (B.4)

I NS-EN 1998-1 punkt 4.3.3.5.1(2) er det også gitt en annen kombinasjonsregel som kan benyttes på lik linje med den i ligning (6.59). Den foreskriver at lastvirkningene kombineres ved hjelp av SRSS uten reduksjon av lastvirkningen i en retning,

$$\sqrt{E_{dx}^2 + E_{dy}^2}. \quad (6.61)$$

Det medfører at

$$|r(t)|_{max} = \sqrt{|r_x(t)|_{max}^2 + |r_y(t)|_{max}^2} \quad \text{der} \quad S_{d,y} = S_{d,x}.$$

Konstanten B innføres.

$$|r(t)|_{max} = \sqrt{|r_x(t)|_{max}^2 + (B |r_x(t)|_{max})^2} = |r_x(t)|_{max} \sqrt{1 + B^2}. \quad (6.62)$$

Dette uttrykket for den maksimale responsen er også illustrert i figur 6.5. Her ser vi at ligning (6.61) er mest konservativ for store verdier av B , mens ligning (6.59) er mer konservativ for små verdier av B . Dersom ligning (6.62) ønskes beskrevet som en lineær relasjon for $0 \leq B \leq 1$, vil den beste tilnærmingen være $|r(t)|_{max} = 1 + 0.275 B$ [15]. Det betyr at ligning (6.59) kan betraktes som en konservativ tilnærming til ligning (6.62), noe som bekreftes i figur 6.5.

6.8 Responsspekteranalyse for elasto-plastiske systemer

Det finnes flere metoder for bestemmelse av responsen til et elasto-plastisk system med mer enn en frihetsgrad utsatt for jordskjelv. Den eksakte løsningen finnes, dersom det ses bort fra feilene som følger av numeriske løsningsmetoder, forenklinger i konstruksjonens geometri osv., ved

tidshistorieanalyse av den dynamiske likevektsligningen. Den er gitt som

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{F}_S(t) = -\mathbf{m} \boldsymbol{\iota} \ddot{u}_g(t),$$

der \mathbf{m} er massematrisen, \mathbf{c} dempningsmatrisen, $\mathbf{F}_S(t)$ inelastisk motstandskraft, $\mathbf{u}(t)$ løsningsvektoren og $-\mathbf{m} \boldsymbol{\iota} \ddot{u}_g(t)$ lastvektoren. Uansett om massen i systemet er samlet i diskrete punkter og systemet er klassisk dempet, krever det løsning av n koblede ligninger å finne løsningsvektoren fordi motstandskraften ikke er gitt av en symmetrisk matrise.

Ikke-lineær tidshistorieanalyse er en svært tidkrevende prosedyre. For det første må det genereres kunstige, eller finnes målte, grunnakselerasjonsforløp som tilsvarer det gjeldende designspektret, hvorefter de koblede ligningene løses. Det krever i seg selv mye arbeid, men i tillegg må prosedyren gjentas for flere grunnakselerasjonsforløp, og resultatene må sammenholdes. Derfor utføres ikke-lineær tidshistorieanalyse kun sjelden selv om det vil bli mer vanlig i takt med utviklingen innenfor dataverdenen. Foreløpig må vi utnytte at det er utviklet forenklede metoder som er mindre tidkrevende og tilstrekkelig nøyaktige [8].

En slik metode er analyse ved påført forskyvning. Denne kalles ofte MPA fra sin engelske betegnelse, Modal Pushover Analysis. Den minner i noen tilfeller om analyse av generaliserte en-frihetsgradsystemer, men tar hensyn til plastiske deformasjoner. Belastningen som er permanent, så som egenvekt, påføres konstruksjonen. De seismiske lastvirkningene på bygget skaleres deretter slik at forskyvningen av den øverste etasjen tilsvarer D_k , den maksimale forskyvningen et en-frihetsgradsystem med samme naturlige vinkelfrekvens, dempningsforhold og duktilitetsfaktor ville oppnådd. Systemet er ikke lineært elastisk. Derfor vil forskyvningsformen som fremkommer ved den statiske analysen, ikke være lik den naturlige svingeformen til det tilsvarende lineært elastiske systemet, ϕ_k . Altså neglisjeres koblingen av modene ikke, så MPA beskriver den elasto-plastiske oppførselen bedre enn den ukoblede tidshistorieanalysen som vi snart skal gjennomgå. Samtidig fremkommer responsen ved ikke-lineær, statisk analyse, noe som er vesentlig mindre tidkrevende enn tidshistorieanalyse. Formen på belastningsvektoren varierer, men kan generelt deles inn i fem typer der de første fire tilsvarer en avansert form for generalisert en-frihetsgradanalyse [3]. De er som følger:

1. Lastandelen på hvert dekke tilsvarer dekkets bidrag til byggets totale masse,

$$F_k = \frac{m_k}{\sum_{j=1}^n m_j} V,$$

der n er antallet etasjer og V er skjærkraften ved terreng som gradvis økes til den korrekte deformasjonen av den øverste etasjen er oppnådd

2. Lastandelen på dekket avhenger av massen på dekket, men øker samtidig med dekkets avstand til terreng,

$$F_k = \frac{m_k h_k}{\sum_{j=1}^n m_j h_j} V$$

3. Fordelingen av lastene tilsvarer egensvingeformen til den første moden,

$$F_k = \frac{m_k \phi_{k1}}{\sum_{j=1}^n m_j \phi_{j1}} V$$

4. Fordelingen ser i begynnelsen ut som i tilfelle 3, men det tas hensyn til at egensvingeformen endres når det oppstår flyt fordi plastiske deformasjoner påvirker stivhetsmatrisen, se ligning (3.21)
5. Det benyttes mer enn en lastvektor der hver av disse har formen

$$\mathbf{s}_k = \frac{L_k}{M_k} \mathbf{m} \phi_k.$$

Det er denne typen MPA som er en flerfrihetsgradanalyse

De maksimale responsene fra lastvektorene i punkt 5 ovenfor kombineres ved hjelp av CQC eller SRSS til den totale responsen. Det gir to kilder til avvik. For det første er responsspekteranalysen i seg selv en tilnærmet metode, og for det andre er den utviklet for lineært elastiske systemer, ikke elasto-plastiske systemer.

En annen forenklet analysemetode er Uncoupled Modal Response History Analysis, UMRHA, der det ses bort ifra koblingen av modale koordinater som oppstår ved plastiske deformasjoner [8]. Bak metoden ligger egentlig den modale analysen siden belastningen i hver mode kun skaper respons i den samme moden såfremt systemet er lineært elastisk. For et lineært elastisk system kan den totale responsen altså finnes ved superponering av responsen fra hver av de modale lastvektorene, $\mathbf{s}_k \omega_r^2 D_r(t)$. Dette bevises på følgende vis:

Den dynamiske likevektsligningen for et lineært elastisk, klassisk dempet system med n frihetsgrader belastet av en av sine modale lastvektorer, $\mathbf{s}_r \omega_r^2 D_r(t)$, er ifølge ligning (3.25) gitt som

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \Phi^T \mathbf{s}_r \omega_r^2 D_r(t).$$

Dette er n ukoblede ligninger på formen

$$M_k \ddot{q}_k(t) + C_k \dot{q}_k(t) + K_k q_k(t) = \phi_k^T \mathbf{s}_r \omega_r^2 D_r(t) = \frac{L_r}{M_r} \phi_k^T \mathbf{m} \phi_r \omega_r^2 D_r(t),$$

der ligning (3.33) er benyttet i den siste overgangen. For $r \neq k$ er høyre side av ligningen lik null grunnet modal ortogonalitet. Altså skaper lastvektoren $\mathbf{s}_r \omega_r^2 D_r(t)$ kun respons i mode r . Som en konsekvens av dette, er responsen i mode k kun avhengig av \mathbf{s}_k . Altså er

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{s}_k S_e(t, T, \xi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}(t) = \phi_k q_k(t) \quad \text{for lineært elastiske systemer.}$$

For et elasto-plastisk system betyr det at \mathbf{s}_k nesten kun vil gi respons i mode k . Det forsværer tilnærmingen

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{s}_k S_e(t, T, \xi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}(t) \approx \phi_k q_k(t) \quad \text{for elasto-plastiske systemer,}$$

som gjør det mulig å regne på en-frihetsgradsystemer i stedet for å løse koblede ligninger. Koblingen av modene kan kun negliseres fordi hver lastvektor, $\mathbf{s}_k \omega_k^2 D_k(t)$, kun virker i en mode [8]. Avviket det innfører vil øke med duktiliteten.

Den totale responsen finnes ved superponering,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k(t).$$

Siden systemet er elasto-plastisk er superposisjonsprinsippet egentlig ikke gyldig, men det er vist tilnærmet gyldig for systemer som ikke er lineært elastiske [8]. Ukoblet tidshistorieanalyse introduserer altså to kilder til avvik i resultatene.

Den ukoblede tidshistorieanalysen, UMRHA, krever som navnet angir, en tidshistorieanalyse. Det betyr at den ikke introduserer feilene som fremkommer ved responsspekteranalyse. Samtidig er den fortsatt tidkrevende i kraft av tidshistorieanalysen. Dersom den maksimale responsen i hver mode bestemmes direkte fra et responsspekter, og disse kombineres ved hjelp av CQC eller SRSS, blir metoden svært effektiv. Men det er samtidig introdusert enda flere årsaker til avvik. Det er hovedsaklig denne metoden som benyttes i norske regelverk. Den er antakeligvis valgt fordi den er effektiv, men den inneholder følgende kilder til avvik:

- Koblingen av modene, som er en konsekvens av plastiske forskyvninger, negliseres fordi hver lastvektor, $\mathbf{s}_k \omega_k^2 D_k(t)$, antas kun å virke i en mode
- Superposisjonsprinsippet benyttes, selv om det kun er vist tilnærmet gyldig for systemer som ikke er lineært elastiske
- Responsspekteranalysen er en tilnærmet metode
- Responsspekteranalysen er utviklet for lineært elastiske systemer, ikke elasto-plastiske systemer

Bortsett fra det tredje punktet ovenfor, vil avvikene øke for større duktilitetsfaktorer. Det betyr at forskjellen mellom resultatene fra ikke-lineær tildshistorieanalyse og resultatene fra ukoblet responsspekteranalyse vil være mindre for et system hvis duktilitet utnyttes i liten grad enn for et hvis duktiliteten utnyttes i stor grad.

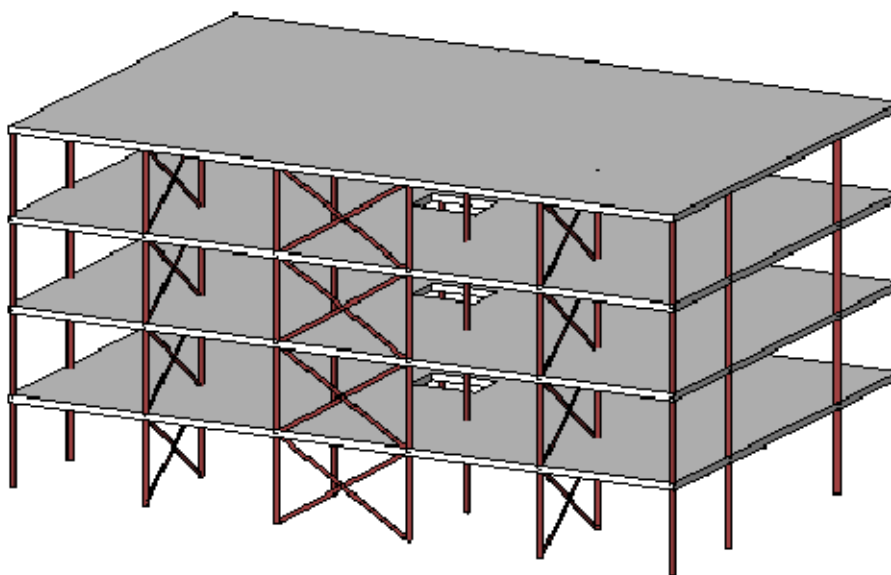
Del II

Sammenlikning av regelverk

Kapittel 7

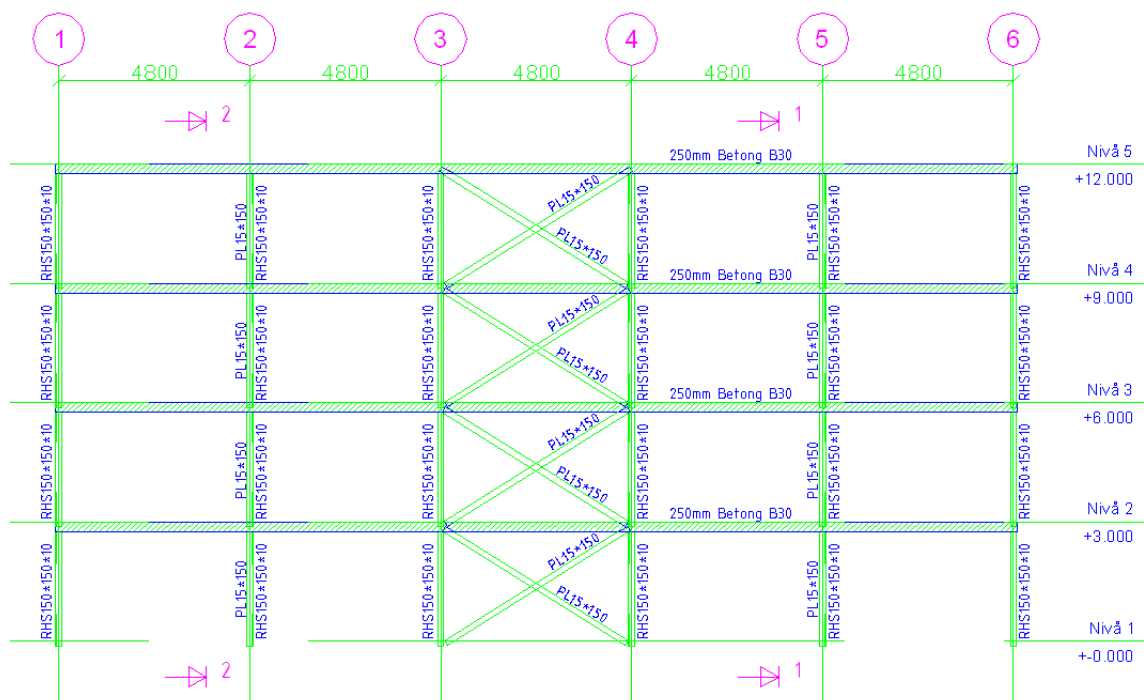
Innledning til hoveddel II

I del I gjennomgikk vi teori som forklarer, hvordan jordskjelv påvirker konstruksjoner, og hvordan vi kan beregne lastvirkningene fra rystelsene. I denne delen av oppgaven benyttes metodene vi ble kjent med i del I til å sammenlikne regelverkene NS 3491-12 og NS-EN 1998-1. Det gjør vi ved å beregne en rekke responsparametre for det tenkte bygget som er vist i figur 7.1, i henhold til hvert av regelverkene. Figur 7.2 viser en typisk etasje i bygget, og figur 7.3 og 7.4 viser snitt gjennom



Figur 7.1: Dobbeltsymmetrisk, tenkt bygg som analyseres i denne delen av oppgaven. For konstruksjonstegninger, se figur 7.2, 7.3 og 7.4

bygget. Her fremgår det at konstruksjonen er dobbeltsymmetrisk, hvilket medfører at analysen kan deles i to 2D-analyser til fordel for en 3D-analyse. I det videre kalles retningen som er parallell med bokstav-aksene x -retning. Retningen som er parallell med tall-aksene kalles y -retning, og z -retning defineres vertikalt.

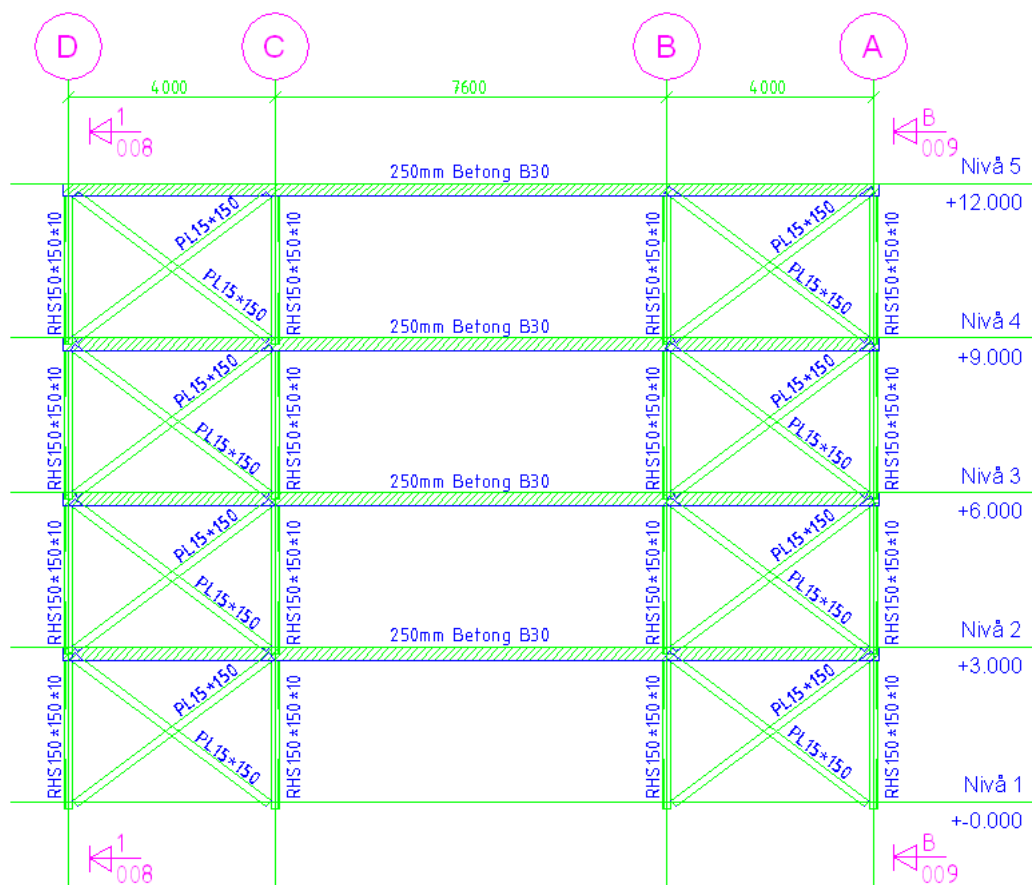


Figur 7.3: Snitt A i bygget i figur 7.1

I kapittel 8 gjennomfører vi en håndberegnet modal analyse av lastvirkningene som bygget i figur 7.1 skal dimensjoneres for i henhold til begge regelverkene. I løpet av analysen diskuterer vi resultatene, og siden dette er det første kapitlet i denne oppgaven som direkte benytter de norske regelverkene, inneholder det også en generell introduksjon til disse. Her kommer det frem at de behandler temaet grunnforhold forskjellig, og vi undersøker derfor konsekvensene av å flytte bygget til en tomt med løsmasser over fjell.

Kapittel 9 inneholder også analyser av lastvirkningene på bygget i forbindelse med jordskjelv, men her benyttes generaliserte en-frihetsgradsystemer som grunnlag for beregningen. Vi sammenlikner metodene i og resultatene fra begge regelverk.

Fra og med kapittel 10 benytter vi dataprogrammer i analysene våre. Dette er en viktig side av arbeidet med bestemmelse av lastvirkninger fra jordskjelv. Dataprogrammer har store fordeler fremfor håndberegninger. De beregner fort og tar hensyn til alle parametre vi legger inn. Dermed blir det enklere å inkludere effekter som vi ellers er nødt til å neglisjere, og risikoen for feil grunnet forglemmelser eller regnefeil reduseres. Det er viktig å huske på at en beregning fra et dataprogram aldri blir bedre enn parametrene brukeren har lagt inn. Det er derfor viktig at brukeren både er godt kjent med teorigrunnlaget for beregningen og dataprogrammets analysemetode samt at brukeren er skeptisk til resultatene. Programmene har den ulempen at de sjelden er lagd for å analysere akkurat slik vi foretrekker. Det kan for eksempel være slik at de ikke tar hensyn til andre ordens effekter. I introduksjonen av hvert dataprogram kommer vi inn på fordeler og ulemper ved det programmet.



Figur 7.4: Snitt 1 i bygget i figur 7.1

I kapittel 10 benytter vi programmet Ansys til å finne responsene til bygget i figur 7.1 på bakgrunn av modale 2D-analyser, og i kapittel 11 benytter vi programmene Ansys og FEM-Design til å gjøre det samme på bakgrunn av modale 3D-analyser.

Kapittel 8

Modal analyse utført for hånd

8.1 Innledning

I dette kapitlet begynner vi å se på gjeldende norske regelverk for prosjektering av konstruksjoner for seismiske lastvirkninger. Regelverkene er NS 3491-12 og NS-EN 1998-1. Vi skal både diskutere litt generelt om disse og sammenlikne resultater som oppnås ved å benytte dem. Det siste gjør vi ved å beregne de seismiske lastvirkningene på bygget i figur 7.1 etter begge regelverk. Bygningen er dobbelsymmetrisk, hvilket medfører at analysen kan deles i to 2D-analyser til fordel for en 3D-analyse. Det benytter vi oss av i dette kapitlet. Vi utfører en modal analyse, og følger formler gitt i NS 3491-12 og NS-EN 1998-1. Når en ligning fra et regelverk introduseres, diskuteres den i tilknytning til teorien som er gjennomgått i hoveddel I.

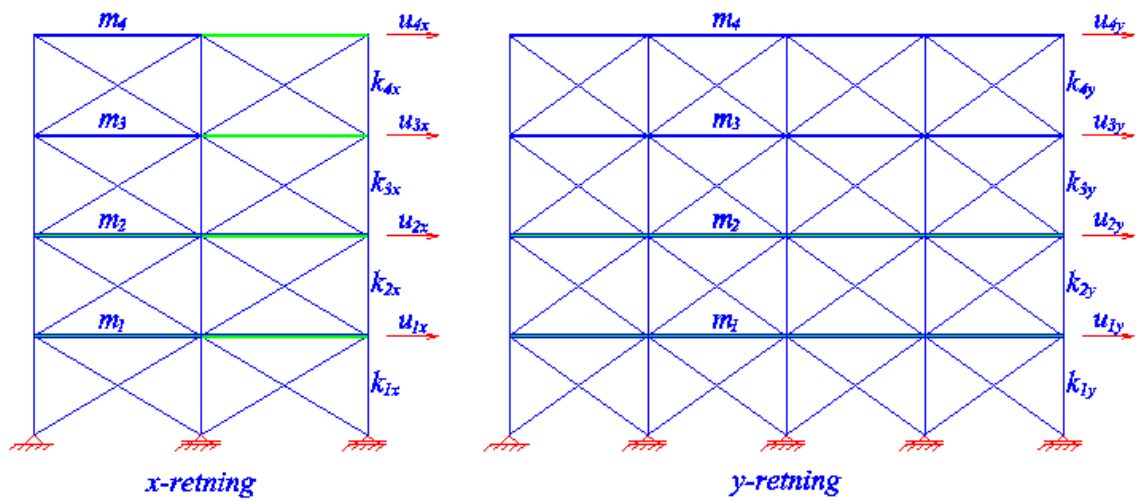
I avsnitt 8.2 beregner vi byggets egensvingeperioder og effektive modale masser analytisk. Her antas det at dekkene er fullstendig stive, ikke kun i sitt eget plan, men også vertikalt. Dermed kan systemets parametre beregnes på grunnlag av to translasjoner i hvert dekke, en i henholdsvis x - og y -retning, hvilket gir totalt åtte frihetsgrader. Analysen deles i to, slik at det gjennomføres en 2D-analyse for hver hovedretning. Sjakten som gir utsparinger i dekkene over første, andre og tredje etasje, vil gi en reduksjon i massen og stivheten til disse dekkene. Siden vi for enkelhets skyld har valgt å redusere antallet frihetsgrader til et minimum, er det ikke mulig å beregne utsparingenes nøyaktige effekt på modene. Men fordi sjakten er plassert midt i byggets horisontalplan og den er liten i forhold til dekkenes dimensjoner, vil den ikke ha stor innvirkning på verken egensvingeformene eller -periodene. Derfor ser vi bort fra sjakten i dette kapitlet.

I avsnitt 8.3 og 8.4 benyttes resultatene fra avsnitt 8.2 til å beregne belastningen konstruksjonen skal dimensjoneres for i henhold til NS 3491-12 og NS-EN 1998-1. De to regelverkene avviker fra hverandre i sin behandling av innflytelsen til grunnforholdene. Vi skal se nærmere på dette i avsnitt 8.5 der de dimensjonerende seismiske lastvirkningene beregnes for mindre gunstige grunnforhold.

Til slutt, i avsnitt 8.6, diskuteres forskjellene og likhetene i resultatene fra de to regelverkene.

8.2 Beregning av svingeformer og -perioder

I dette avsnittet beregner vi egensvingeperiodene og de effektive modale massene til konstruksjonen ved bruk av modal analyse. Kun matematiske verktøy som Matlab og kalkulator benyttes som hjelpemiddel. Vi antar at dekkene er fullstendig stive i sitt eget plan og ser bort fra den vertikale forskyvningen av dekkene som oppstår ved bøyning og som andre ordens effekt ved horisontal forskyvning. Derfor kan systemets egenskaper beregnes på grunnlag av to horisontale translasjonsfrihetsgrader i hvert dekke. Fordi bygget er dobbeltsymmetrisk, vil modene enten foreskrive forskyvning i x -retning eller i y -retning. Ingen av modene vil foreskrive translasjon i begge hovedretninger eller rotasjon i horisontalplanet. Derfor kan analysen deles i to 2D-analyser, en for hver hovedretning. Modellene er vist i figur 8.1.



Figur 8.1: Modellene som benyttes i de todimensjonale analysene i dette kapitlet

Massematrisen til systemet er diagonal fordi massen betraktes som samlet i frihetsgradene. Det betyr at massematrisen for begge retninger ser slik ut:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

der m_k er massen knyttet til frihetsgraden i dekket over etasje k . Massen fra egenvekten på hver etasje, $m_{g,d}$, beregnes fra massetettheten til betong som er 25 kN/m^2 [40], samt den påførte egenlasten på 500 N/m^2 . Det gir

$$\begin{aligned} m_{g,d} &= \left(\frac{25000 \text{ N/m}^3}{9.81 \text{ m/s}^2} \cdot 0.25 \text{ m} + \frac{500 \text{ N/m}^2}{9.81 \text{ m/s}^2} \right) (5 \cdot 4.8 \text{ m}) \cdot (2 \cdot 4.0 \text{ m} + 7.6 \text{ m}) \\ &= 257 \cdot 10^3 \text{ kg}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Som nevnt i avsnitt 8.1, fratrekkes sjaktens areal ikke fordi effektene av sjakten neglisjeres i dette kapitlet.

Egenvekten til vindkryssene og søylene fordeles til frihetsgradene i dekkene og treghetsmomentene deres neglisjeres. Dermed blir massematrisen diagonal, og feilen det gir opphav til er marginal fordi massen til de vertikale komponentene kun utgjør en liten del av byggets totale masse. Massetettheten til stål er 7850 kg/m^3 [37]. Tverrsnittsarealet til hver av staven i vindkryssene og en HUP150x10 finnes ved henholdsvis utregning og i [30]. Det gir

$$A_{PL} = 15 \cdot 150 \text{ mm}^2 = 2250 \text{ mm}^2, \quad A_{RHS} = 5669 \text{ mm}^2. \quad (8.3)$$

Altså er vekten av stål i hver etasje

$$\begin{aligned} m_{g,s} &= 7850 \text{ kg/m}^3 \left((4\sqrt{4.8^2 + 3.0^2} + 8\sqrt{4.0^2 + 3.0^2}) \cdot 2.250 + 6 \cdot 4 \cdot 3.0 \cdot 5.669 \right) \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\ &= 4.3 \cdot 10^3 \text{ kg}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Vekten til den tilnærmet permanente snølasten på taket er

$$m_{p,4} = \frac{560 \text{ N/m}^2}{9.81 \text{ m/s}^2} \cdot (5 \cdot 4.8 \text{ m}) \cdot (2 \cdot 4.0 \text{ m} + 7.6 \text{ m}) = 21.4 \cdot 10^3 \text{ kg}, \quad (8.5)$$

mens nyttelasten på resten av dekkene gir

$$m_{p,1} = m_{p,2} = m_{p,3} = \frac{900 \text{ N/m}^2}{9.81 \text{ m/s}^2} \cdot (5 \cdot 4.8 \text{ m}) \cdot (2 \cdot 4.0 \text{ m} + 7.6 \text{ m}) = 34.3 \cdot 10^3 \text{ kg}. \quad (8.6)$$

Kombinasjon av ligning (8.1) - (8.6) gir massene tilknyttet hver frihetsgrad,

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_{g,d} + m_{g,s} + m_{p,1-3} = 296 \cdot 10^3 \text{ kg}, \quad (8.7)$$

og

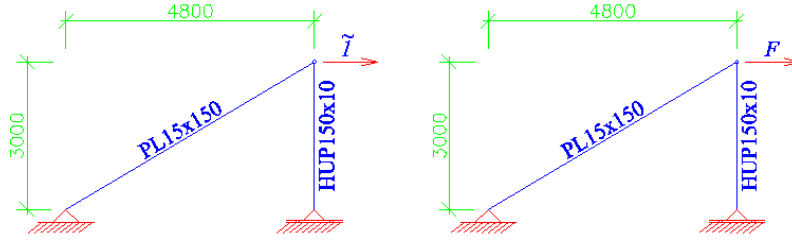
$$m_4 = m_{g,d} + \frac{1}{2}m_{g,s} + m_{p,4} = 281 \cdot 10^3 \text{ kg}. \quad (8.8)$$

Ved innsetting av ligning (8.7) og (8.8) i ligning (8.1) finnes massematrisen,

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 281 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 296 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 296 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 296 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ kg}. \quad (8.9)$$

Nå går vi over til å vurdere stivhetsmatrisene i hver hovedretning. De avhenger av stivheten til vindkryssene i den pågjeldende retningen, som utregnes ved bruk av enhetslastmetoden. Først beregner vi stivhetsmatrisen, den geometriske stivhetsmatrisen, naturlige vinkelfrekvenser, moder og effektive modale masser i x -retning. Deretter følger de samme beregningene for y -retning og til slutt sammenliknes resultatene.

Figur 8.2 viser et vindkryss i x -retning påført en enhetslast i sin frihetsgrad. Kun staven som tar strekk medtas, siden vindkryssene består av strekkstag som knekker ut ved trykk. Sammenhengen mellom last og forskyvning for et system som dette er i henhold til kraftmetoden gitt som [16]



Figur 8.2: Vindkryss i x -retning utsatt for virtuell enhetslast (til venstre) og virkelig last (til høyre)

$$\tilde{1} \cdot \delta = \sum_{j=1}^N S_{1,k} S_{0,k} \frac{l_k}{E_k A_k}, \quad (8.10)$$

der N er antallet staver, $S_{0,k}$ aksiallasten i staven på grunn av den virkelige lasten F , $S_{1,k}$ er aksiallasten i staven på grunn av den virtuelle enhetslasten $\tilde{1}$, og l_k , E_k og A_k er stavens lengde, elastisitetsmodul og tverrsnittsareal.

Stålkvaliteten for både vindkryss og søyler er S355. Det medfører at elastisitetsmodulet er 210 kN/mm^2 [37]. Tverrsnittsarealet til staven og søylen er gitt i ligning (8.3). Søylenes lengde er lik etasjehøyden, dvs.

$$l_{RHS} = 3000 \text{ mm}, \quad (8.11)$$

mens lengden til staven i vindkrysset fremkommer av Pythagoras formel,

$$l_{PL} = \sqrt{3000^2 + 4800^2} \text{ mm} = 5660 \text{ mm}. \quad (8.12)$$

Kreftene i staven i de to lasttilfellene beregnes ut fra kravet til likevekt i hvert knutepunkt,

$$S_{1,PL} \cdot \cos\left(\arctan\frac{3000}{4800}\right) = \tilde{1} \quad \Leftrightarrow \quad S_{1,PL} = 1.1792. \quad (8.13)$$

$$S_{1,RHS} = -S_{1,PL} \cdot \sin\left(\arctan\frac{3000}{4800}\right) = -0.6250. \quad (8.14)$$

Tilsvarende fås for det andre lasttilfellet

$$S_{0,PL} = 1.1792 F \quad \text{og} \quad S_{0,RHS} = -0.6250 F. \quad (8.15)$$

Resultatene i ligning (8.3) og (8.11)-(8.15) innsettes i ligning (8.10), og dermed finnes den lineært elastiske sammenhengen mellom last og forskyvning,

$$\tilde{1} \cdot \delta = \left(1.1792^2 \frac{5660 \text{ mm}}{210 \cdot 2250 \text{ kN}} + 0.6250^2 \frac{3000 \text{ mm}}{210 \cdot 5669 \text{ kN}} \right) F \quad \Leftrightarrow$$

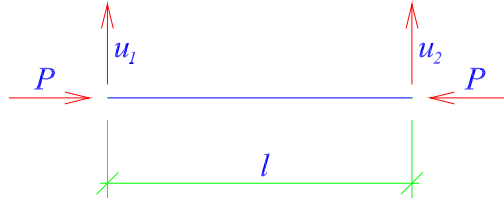
$$k_x = \frac{F}{\delta} = 56.7 \cdot 10^6 \text{ N/m},$$

der k_x er stivheten til hvert vindkryss i x -retning. Det er to vindkryss i x -retning i hver etasje. Siden vi inntil videre ser bort fra andre ordens effekter, betyr det at stivhetsmatrisen i x -retning

blir

$$\mathbf{k}_x = 2 \begin{bmatrix} k_x & -k_x & 0 & 0 \\ -k_x & 2k_x & -k_x & 0 \\ 0 & -k_x & 2k_x & -k_x \\ 0 & 0 & -k_x & 2k_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 113 & -113 & 0 & 0 \\ -113 & 227 & -113 & 0 \\ 0 & -113 & 227 & 113 \\ 0 & 0 & -113 & 227 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ N/m}. \quad (8.16)$$

Den geometriske stivhetsmatrisen til et stavelement som det i figur 8.3 kan finnes ved likevektsbetraktning [4]. Når det tas hensyn til plastiske deformasjoner blir resultatet [4, 15]



Figur 8.3: Stavelement med to frihetsgrader og aksiallast P

$$\mathbf{k}_G = \mu \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.17)$$

Duktilitetsfaktoren μ , som er definert i ligning (5.11), kan velges som ulike verdier i både NS 3491-12 og NS-EN 1998-1, og er i det hastighetsensitive området av responspektrene tilnærmet gitt av verdiene k_Q i (8.37) og q i (8.89), se ligning (5.15), (8.37) og (8.89). I avsnitt 8.3 og 8.4 brukes verdier på henholdsvis $\frac{10}{7}$ og 1.5. Verdiene er så like at det ikke er grunn til å gjennomføre to analyser. Vi velger derfor å jobbe videre med $\mu = 1.5$. Vindkryssene er ikke belastet før jordskjelvet. Søylenes bærer derimot dekkene, og det må tas hensyn til lasten fra disse i en geometrisk stivhetsmatrise. I den øverste etasjen er den totale lasten i søylene lik $m_4 g$, i etasjen under er den $(m_3 + m_4) g$, dernest $(m_2 + m_3 + m_4) g$ og i de nederste søylene er lasten $m_{tot} g$. Søylenes lengde er lik etasjehøyden, dvs. $3m$. Det betyr at den geometriske stivhetsmatrisen blir

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_G &= 1.5 \frac{g}{h} \begin{bmatrix} m_4 & -m_4 & 0 & 0 \\ -m_4 & m_3 + 2m_4 & -m_3 - m_4 & 0 \\ 0 & -m_3 - m_4 & m_2 + 2m_3 + 2m_4 & -m_2 - m_3 - m_4 \\ 0 & 0 & -m_2 - m_3 - m_4 & m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 2m_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ N/m}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Den kombinerte stivhetsmatrisen er gitt i ligning (3.40) som også er gyldig for systemer med flere frihetsgrader. Innsetting av resultatene fra ligning (8.16) og (8.18) gir

$$\bar{\mathbf{k}}_x = \mathbf{k}_x - \mathbf{k}_G = \begin{bmatrix} 112 & -112 & 0 & 0 \\ -112 & 222 & -111 & 0 \\ 0 & -111 & 220 & -109 \\ 0 & 0 & -109 & 216 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ N/m}. \quad (8.19)$$

Her ser vi at de geometriske effektene har liten innflytelse på den dynamiske likevektsligningen siden \mathbf{k}_x og $\bar{\mathbf{k}}_x$ er tilnærmet like, se ligning (8.16). Det forsvarer valget om kun å beregne den geometriske stivhetsmatrisen for en verdi av μ .

De naturlige vinkelfrekvensene finnes fra ligning (3.22) der den kombinerte stivhetsmatrisen benyttes. Uttrykket gjentas her:

$$\det(\bar{\mathbf{k}}_x - \omega_k^2 \mathbf{m}) = 0$$

Eigenverdiproblemet løses i Matlab, scriptet er vedlagt i B.5. Det er en del numeriske feil i resultatene som fremkommer. Det skyldes sannsynligvis trunkeeringsfeil, som oppstår fra avrundingsfeil ved addering av små og store koeffisienter [4]. Derfor er de virkelige naturlige vinkelfrekvensene funnet ved iterasjon ut ifra resultatene fra dataprogrammet. Det gir

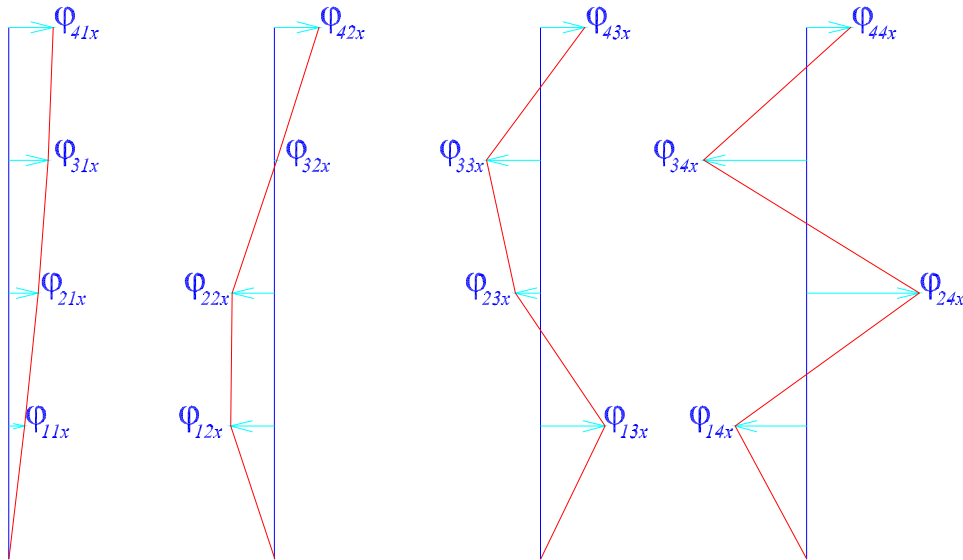
$$\omega_{1x} = 6.71 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_{2x} = 19.4 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_{3x} = 29.7 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_{4x} = 36.3 \text{ s}^{-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$T_{1x} = 0.936 \text{ s}, \quad T_{2x} = 0.323 \text{ s}, \quad T_{3x} = 0.212 \text{ s}, \quad T_{4x} = 0.173 \text{ s}. \quad (8.20)$$

De tilhørende egensvingeformene finnes ved innsetting av ω_k i ligningene i (3.21), der den kombinerte stivhetsmatrisen benyttes. Resultatet er

$$\phi_{1x} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.89 \\ 0.66 \\ 0.36 \end{bmatrix}, \quad \phi_{2x} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.05 \\ -0.96 \\ -1.00 \end{bmatrix}, \quad \phi_{3x} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ -1.21 \\ -0.59 \\ 1.45 \end{bmatrix}, \quad \phi_{4x} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ -2.31 \\ 2.49 \\ -1.56 \end{bmatrix}. \quad (8.21)$$

De naturlige svingeformene er vist i figur 8.4. Her ser vi at den andre naturlige svingeformen har et punkt like under taket i tredje etasje som ikke opplever noen translasjon. Den tredje svingeformen har to punkter med den egenskapen, og den fjerde har tre. Det er en generell regel for systemer



Figur 8.4: Egensvingeformene i x -retning i henhold til ligning (8.21)

hvis innflytelsesvektor kun består av ettall at egensvingeform k har $k - 1$ punkter som ikke er fastholdt mot translasjon av opplagerbetingelser, men som likevel kun roteres [8]. Det medfører følgende:

- Høyere moder har relativt liten innflytelse på den totale skjærkraften ved grunnivå fordi de tilsvarende statiske lastene som gis av de høyere modene, virker mot hverandre når de summeres ved grunnivå
- Høyere moder har forholdsvis stor innflytelse på lastvirkninger i de øverste etasjene fordi forskyvningene fra hver mode kan virke i samme retning her. Samtidig er pseudoakselerasjonen vanligvis økende med modenummeret, se figur 8.9, og det forsterker tendensen
- Høyere moder har generelt svært liten innflytelse på momentet ved grunnivå. Det skyldes at de tilsvarende statiske lastene som fremkommer fra de høyere modene, for det første virker mot hverandre og for det andre ikke er størst i den øverste etasjen. Den siste iakttakelsen fremkommer også av figur 8.4

Etter disse betraktningene går vi nå over til å beregne den effektive modale massen til hver av modene. Denne er for mode k gitt i ligning (3.37) som gjentas her,

$$m_k = \boldsymbol{\iota}^T \mathbf{s}_k = \boldsymbol{\iota}^T \frac{L_k}{M_k} \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_k.$$

Siden alle frihetsgradene virker i samme retning, er

$$\boldsymbol{\iota} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T. \quad (8.22)$$

Ligning (3.28) gir

$$M_k = \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_k \Leftrightarrow$$

$$M_{1x} = 0.68 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad M_{2x} = 0.85 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad M_{3x} = 1.4 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad M_{4x} = 4.4 \cdot 10^6 \text{ kg}. \quad (8.23)$$

$$L_k = \boldsymbol{\Phi}_k^T \mathbf{m} \boldsymbol{\iota} \Leftrightarrow$$

$$L_{1x} = 0.85 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad L_{2x} = -0.28 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad L_{3x} = 0.18 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad L_{4x} = -0.13 \cdot 10^6 \text{ kg}. \quad (8.24)$$

Innsetting fra ligning (8.9), (8.21), (8.22), (8.23) og (8.24) i ligning (3.37) gir de effektive modale massene til hver svingeform,

$$m_{1x} = 1.0 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad m_{2x} = 95 \cdot 10^3 \text{ kg}, \quad m_{3x} = 22 \cdot 10^3 \text{ kg}, \quad m_{4x} = 3.7 \cdot 10^3 \text{ kg}. \quad (8.25)$$

Forholdet mellom disse kommer tydeligere frem når de angis i andel av den totale massen som vi finner fra massematrisen,

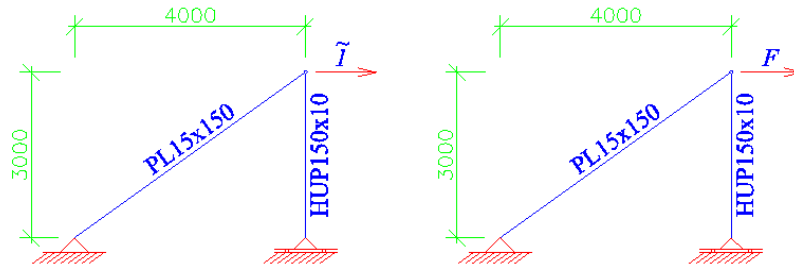
$$m_{tot} = \boldsymbol{\iota}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\iota} = 1.17 \cdot 10^6 \text{ kg}. \quad (8.26)$$

Det gir

$$m_{1x} = 0.897 m_{tot}, \quad m_{2x} = 0.081 m_{tot}, \quad m_{3x} = 0.019 m_{tot}, \quad m_{4x} = 0.003 m_{tot}. \quad (8.27)$$

På bakgrunn av diskusjonen ved ligning (3.39) kan vi fra ligning (8.27) konkludere at den første egensvingeformen er dominerende, den andre gir et lite bidrag og de to siste er neglisjerbare.

Nå skal vi finne egensvingeperiodene, de naturlige svingeformene og de effektive modale massene i y -retning. Massematrisen og den geometriske stivhetsmatrisen er uavhengig av retningen, men stivhetsmatrisen er annerledes. Denne beregnes på samme vis som vi gjorde for x -retning, altså ved enhetslastmetoden, se ligning (8.10). Et av vindkryssene i y -retning er vist i figur 8.5.



Figur 8.5: Vindkryss i y -retning utsatt for virtuell enhetslast (til venstre) og virkelig last (til høyre)

Elastisitetsmodulet og tverrsnittsarealene til stavene er de samme som i x -retning. Søylen lengde er fortsatt lik etasjehøyden, $l_{RHS} = 3000 \text{ mm}$, mens lengden til staven i vindkrysset må beregnes ved hjelp av Pythagoras formel. Denne gir

$$l_{PL} = \sqrt{3000^2 + 4000^2} \text{ mm} = 5000 \text{ mm}.$$

Kreftene i stavene i de to lasttilfellene beregnes som før ut fra kravet til likevekt i hvert knutepunkt. Det gir

$$S_{1,PL} = 1.2500, \quad S_{1,RHS} = -0.7500, \quad S_{0,PL} = 1.2500 F \quad \text{og} \quad S_{0,RHS} = -0.7500 F.$$

Ved bruk av ligning (8.10) finnes sammenhengen mellom last og forskyvning,

$$\tilde{1} \cdot \delta = (1.2500^2 \frac{5000 \text{ mm}}{210 \cdot 2250 \text{ kN}} + 0.7500^2 \frac{3000 \text{ mm}}{210 \cdot 5669 \text{ kN}}) F \Leftrightarrow$$

$$k_y = \frac{F}{\delta} = 55.7 \cdot 10^6 \text{ N/m}.$$

Det er fire vindkryss i y -retning i hver etasje. Det betyr at stivhetsmatrisen i y -retning, der det ikke tas hensyn til geometriske effekter, ser slik ut:

$$\mathbf{k}_y = 4 \begin{bmatrix} k_y & -k_y & 0 & 0 \\ -k_y & 2k_y & -k_y & 0 \\ 0 & -k_y & 2k_y & -k_y \\ 0 & 0 & -k_y & 2k_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 223 & -223 & 0 & 0 \\ -223 & 446 & -223 & 0 \\ 0 & -223 & 446 & -223 \\ 0 & 0 & -223 & 446 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ N/m}. \quad (8.28)$$

Når den geometriske stivhetsmatrisen i ligning (8.18) subtraheres fra matrisen i ligning (8.28), fremkommer den kombinerte stivhetsmatrisen,

$$\bar{\mathbf{k}}_y = \mathbf{k}_y - \mathbf{k}_G = \begin{bmatrix} 222 & -222 & 0 & 0 \\ -222 & 441 & -220 & 0 \\ 0 & -220 & 438 & -219 \\ 0 & 0 & -219 & 435 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ N/m}. \quad (8.29)$$

Her ser vi at de geometriske effektene har enda mindre innflytelse på den dynamiske likevekts-ligningen i y -retning enn i x -retning, fordi systemet er stivere i førstnevnte hovedretning. Dermed blir k_y og \bar{k}_y nesten like.

De naturlige vinkelfrekvensene finnes som tidligere fra ligning (3.22) der den kombinerte stivhetsmatrisen benyttes. Eigenverdiproblemet løses i Matlab, scriptet er vedlagt i B.5. Som nevnt er det en del numeriske feil i resultatene som fremkommer, og de naturlige vinkelfrekvensene er derfor funnet ved iterasjon fra egenverdiene fra dataprogrammet. Resultatet er

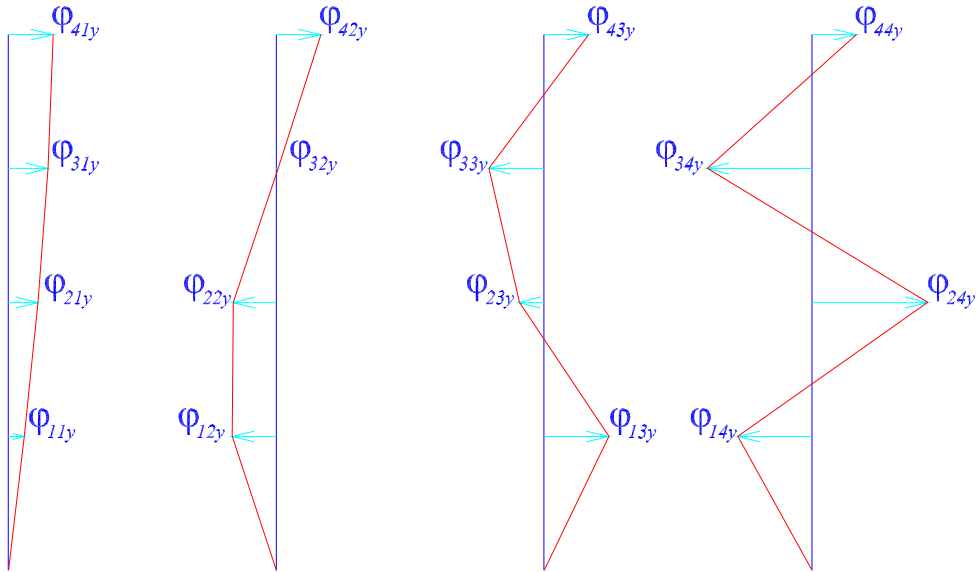
$$\omega_{1y} = 9.53 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_{2y} = 27.5 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_{3y} = 41.9 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_{4y} = 51.2 \text{ s}^{-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$T_{1y} = 0.659 \text{ s}, \quad T_{2y} = 0.229 \text{ s}, \quad T_{3y} = 0.150 \text{ s}, \quad T_{4y} = 0.123 \text{ s}. \quad (8.30)$$

De tilhørende egensvingeformene finnes ved innsetting av ω_k i ligningene i (3.21), der den kombinerte stivhetsmatrisen benyttes. Det gir

$$\phi_{1y} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.88 \\ 0.66 \\ 0.35 \end{bmatrix}, \quad \phi_{2y} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.04 \\ -0.96 \\ -0.99 \end{bmatrix}, \quad \phi_{3y} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ -1.23 \\ -0.56 \\ 1.45 \end{bmatrix}, \quad \phi_{4y} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ -2.33 \\ 2.57 \\ -1.64 \end{bmatrix}. \quad (8.31)$$

Egensvingeformene er vist i figur 8.6. Sammenlikning med figur 8.4 viser at de naturlige svingeformene er nesten like i x - og y -retning. Begrunnelsen for det kommer vi tilbake til etter at vi har beregnet de effektive modale massene til modene.



Figur 8.6: Egensvingeformene i y -retning i henhold til ligning (8.31)

Parametrene M_k og L_k finnes fra ligning (3.28),

$$M_{1y} = 0.68 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad M_{2y} = 0.85 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad M_{3y} = 1.4 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad M_{4y} = 4.6 \cdot 10^6 \text{ kg}. \quad (8.32)$$

$$L_{1y} = 0.84 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad L_{2y} = -0.29 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad L_{3y} = 0.18 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad L_{4y} = -0.14 \cdot 10^6 \text{ kg}. \quad (8.33)$$

Innsetting av resultatene fra ligning (8.9), (8.22), (8.32) og (8.33) i ligning (3.37) gir de effektive modale massene til hver mode,

$$m_{1y} = 1.0 \cdot 10^6 \text{ kg}, \quad m_{2y} = 96 \cdot 10^3 \text{ kg}, \quad m_{3y} = 22 \cdot 10^3 \text{ kg}, \quad m_{4y} = 3.9 \cdot 10^3 \text{ kg}. \quad (8.34)$$

Som tidligere, angir vi disse i forhold til den totale massen vi fant i ligning (8.26),

$$m_{1y} = 0.896 m_{tot}, \quad m_{2y} = 0.082 m_{tot}, \quad m_{3y} = 0.019 m_{tot}, \quad m_{4y} = 0.003 m_{tot}. \quad (8.35)$$

Igjen er den første egensvingeformen dominerende, den andre gir et lite bidrag og de to siste er neglisjerbare.

Det er interessant å sammenlikne resultatene i x - og y -retning, fordi det viser effekten av økt stivhet. Koeffisientene i stivhetsmatrisen for deformasjon i y -retning er ca. dobbelt så store som koeffisientene i x -retning. Ikke overraskende medfører det at egensvingeperidene i y -retning er kortere enn de i x -retning. De spesifikke forholdene mellom disse er

$$\begin{aligned} \frac{T_{1y}}{T_{1x}} &= \frac{0.659 \text{ s}}{0.936 \text{ s}} = 0.705, & \frac{T_{2y}}{T_{2x}} &= \frac{0.229 \text{ s}}{0.323 \text{ s}} = 0.708, \\ \frac{T_{3y}}{T_{3x}} &= \frac{0.150 \text{ s}}{0.212 \text{ s}} = 0.708, & \frac{T_{4y}}{T_{4x}} &= \frac{0.123 \text{ s}}{0.173 \text{ s}} = 0.708. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Forholdet er for alle modene tilnærmet 0.71, hvilket virker fornuftig basert på uttrykket for egensvingeperioden til et system med en frihetsgrad i ligning (3.5),

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

der (3.3) er benyttet i den siste overgangen. Forholdet mellom egensvingeperiodene til to systemer med lik masse, der stivheten til det ene er dobbelt så stor som stivheten til det andre, vil dermed være lik $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.71$. I bygget vårt er stivheten i y -retning nesten dobbelt så stor som stivheten i x -retning. Derfor er resultatene i ligning (8.36) alle i underkant av 0.71. Det skyldes andre ordens effekter at forholdet mellom egensvingeperiodene ikke er det samme for alle modene selv om stivheten i både x - og y -retning er lik i alle etasjene.

Når det gjelder de effektive modale massene til hver mode, er disse nesten like for x - og y -retning, $m_{kx} \approx m_{ky}$. Det skyldes at egensvingeformene er tilnærmet like i de to retningene, $\phi_{kx} \approx \phi_{ky}$, noe som kanskje virker bemerkelsesverdig, siden stivheten i x - og y -retning er forskjellig. Egensvingeformene er nesten ens fordi stivhetsmatrisen i y -retning er tilnærmet lik den i x -retning multiplisert med en konstant. Fordelingen av stivhet i hver etasje er altså omtrent lik i de to retningene. Samtidig er massematrisen eksakt lik i de to retningene, og når $\omega_{kx} \approx 0.71 \omega_{ky}$, som det er vist ovenfor, blir $m_{kx} \approx m_{ky}$ ved innsetting i ligning (3.22). Grunnen til at egensvingeformene ikke er eksakt like i de to retningene ligger i de geometriske effektene.

Den generelle formen på responsspektret for pseudoakselerasjon, se figur (5.19), tilsier at kortere egensvingeperioder gir større pseudoakselerasjon i det hastighet- og forskyvningsensitive området. De aller fleste konstruksjoners dominerende egensvingeperioder tilhører det hastighetsensitive området, så kortere egensvingeperioder gir vanligvis større pseudoakselerasjon, hvilket igjen medfører større total skjærkraft ved grunnivå i henhold til ligning (3.39). I de følgende avsnittene skal vi beregne lastene som konstruksjonen i figur 7.1 skal dimensjoneres for i henhold til NS 3491-12 og NS-EN 1998-1. Her forventer vi at den totale skjærkraften ved grunnivå blir større i y - enn i x -retning fordi fordelingen av de effektive modale massene samt formen på modene er tilnærmet like i de to retningene mens egensvingeperiodene er kortere i y -retning.

8.3 Regelverket NS 3491-12

Utgivelsen av NS 3491-12 i desember 2004 medførte at det ble påkrevd at bygg i Norge dimensjoneres for lastvirkninger fra jordskjelv. Det er dog listet en rekke tilfeller der det kan ses bort fra seismiske lastvirkninger. Et eksempel er konstruksjoner der pseudoakselerasjonen til de viktigste modene er lavere enn $0.49 m/s^2$. Det er ikke spesifisert hva som karakteriserer en viktig mode, så den vurderingen må den prosjekterende ta. Et annet går på bruken av byggverket. Bygg i en etasje og mindre lagerbygg går for eksempel under utelatelseskriteriet. Det tas hensyn til konstruksjonens formål ved bestemmelse av de dimensjonerende seismiske lastene. Sykehus og viktig infrastruktur dimensjoneres derfor for større grunnakselerasjon enn bolighus, og dermed går boliger og kontorhus oftere under utelatelseskriteriet enn sykehus. Ifølge NS 3490:2004 skal lastvirkningene fra jordskjelv av størrelsen som behandles i NS 3491-12, betraktes som ulykkeslaster [38]. Det betyr at kapasiteten til en konstruksjon som dimensjoneres i henhold til NS 3491-12, vil bli nesten fullstendig utnyttet hvis det oppstår et jordskjelv i størrelsesordenen som regelverket behandler. Men det er ikke angitt et designspekter for hyppigere jordskjelv. Dermed gir prosjektering for seismiske påvirkninger i henhold til NS 3491-12 ingen sikkerhet for at interiør i bygget ikke vil ødelegges ved vanlige jordskjelv. Det bør derfor stilles strengere krav enn de som fremgår i regelverket, ved prosjektering av byggverk som inneholder stor materialistisk verdi, for eksempel museer og prestisjebygg [1]. Designspektret er basert på grunnens maksimale akselerasjon med en returperiode på 475 år. Det tilsvarer 10 % sannsynlighet for overskridelse på 50 år.

Det er gitt fire forskjellige metoder som kan benyttes i prosjekteringen. Den første kalles *system med en frihetsgrad*, og bygger på teorien for generaliserte en-frihetsgradsystemer som vi introduserte i avsnitt 3.4. Den andre er *flerfrihetsgradsanalyse*, som tilsvarer responsspekteranalysen vi gjennomgikk i avsnitt 6.6 og 6.8. Den tredje analysemetoden, *tidshistorie*, baseres på minimum tre grunnakselerasjonsforløp, der den ugunstigste lastvirkningen skal benyttes. Den siste metoden er analyse basert på *påført forskyvning* der lastfordelingen tilsvarer den i punkt 3 i avsnitt 6.8 eller en forenkling av denne. Eurokoden var det første regelverket for dimensjonering av konstruksjoner som inkluderte MPA, og NS 3491-12 har altså fulgt etter [15].

Av de fire metodene er *system med en frihetsgrad* i de fleste tilfeller den minst arbeidskrevende, men den er lite brukt i praksis fordi det stilles forholdsvis strenge krav til konstruksjonens geometri for at den skal være gyldig. Bygg som ikke tilfredsstiller kravene, prosjekteres vanligvis ved

bruk av *flerfrihetsgradsanalyse*. Analyse basert på *tidshistorie* og *påført forskyvning* er mer beregningsmessig krevende, og benyttes normalt kun for konstruksjoner som belastes hardt av seismiske lastvirkninger, og hvis duktile oppførsel derfor må utnyttes i stor grad. I avsnitt 5.4 så vi at plastisk deformasjon, altså duktilitet, opptar energi. Det betyr at en konstruksjon som deformeres plastisk i forbindelse med et gitt jordskjelv, tar opp mindre tilsvarende statiske laster enn en konstruksjon som forblir elastisk. Samtidig angir NS 3491-12 dokumentasjonskrav til duktiliteten dersom denne utnyttes i vesentlig grad. Det er tidskrevende å tilfredsstille disse, og derfor benyttes duktiliteten vanligvis kun for konstruksjoner som ellers ville vært svært ugunstig belastet i forbindelse med jordskjelv. Alt i alt er *flerfrihetsgradsanalyse* den vanligste analysemetoden fordi de fleste konstruksjoner som ikke går under utelatelseskriteriet, hverken tilfredsstiller de geometriske kravene som stilles for metoden *system med en frihetsgrad*, eller har behov for å utnytte sin duktilitet i stor grad.

Det er i henhold til NS 3491-12 punkt 4.6 vanligvis legitimt ikke å ta hensyn til den vertikale komponenten til jordskjelv. Punktet lyder

...For byggverk og konstruksjoner med moderate spennvidder kan det normalt ses bort fra lastvirkningene fra jordskjelvets vertikalkomponent...

Bakgrunnen for utelatelsen er at konstruksjoner skal prosjekteres for sin egenvekt og nyttelast i bruddgrensetilstand hvorimot prosjekteringen for seismiske laster skjer i ulykkesgrensetilstand. Sikkerhetsfaktorene er mye større i bruddgrensetilstand enn i ulykkesgrensetilstand [24]. Samtidig er egensvingeperiodene som foreskriver vertikal bevegelse, styrt av aksialstivheten til de bærende komponentene. Stivheten er generelt så stor at vi befinner oss i den delen av responsspektret for pseudoakselerasjon der denne enda ikke har blitt konstant. Pseudoakselerasjonen vil altså vanligvis være liten for de aktuelle modene. De to faktorene medfører at de seismiske lastene fra vertikale rystelser kun sjelden vil være dimensjonerende.

I vårt eksempel kan vi derfor se bort fra den vertikale komponenten til grunnakselerasjonen og kun beregne belastningen på de horisontale frihetsgradene. Det skal vi nå gjøre med utgangspunkt i resultatene i avsnitt 8.2. Vi benytter en todimensjonal modal analyse fordi bygget er dobbeltsymmetrisk. I tillegg til feilkildene som er nevnt i avsnitt 6.8, gir vårt valg av analysemetode to til. Vi har for det første kun innført fire frihetsgrader, to i hver etasje. Dermed har vi antatt at dekkene er fullstendig stive både horisontalt og vertikalt. Aksialstivheten til et betongdekke er ekstremt stor, så den delen av antakelsen innfører nesten ikke feil i resultatene. Bøyestivheten er derimot ikke fullt så stor, så forenklingen innfører feil fordi dekkene vil svinge vertikalt og dermed innføre treghetskrefter som vi ikke tar hensyn til. Den andre feilkilden bunner i at kun en tredimensjonal analyse kan ta hensyn til torsjon. Det vil oppstå torsjon både på grunn av toleranser i byggefasen og skjevstilling av nyttelast. Det er også mulig at grunnen roterer om en vertikal akse i forbindelse med et jordskjelv. Alle disse forholdene medfører at dekkene vil rotere om en vertikal akse uansett om bygget i teorien er dobbeltsymmetrisk. Når dekkene både roteres og translères vil det oppstå større last på vindkryssene i den siden av bygget som forskyves mest. En tredimensjonal analyse utført i henhold til NS 3491-12 ville ikke tatt eksplisitt hensyn til disse torsjonsvikningene fordi de ikke er spesifisert i regelverket. Vi må gå ut ifra at det i stedet er spesifisert et mer konservativt designspekter.

Den dimensjonerende pseudoakselerasjonen er i NS 3491-12 gitt som

$$S_{ed}(T_i) = k_Q k_S \gamma_1 a_g S_e(T_i) k_{f, spiss}, \quad (8.37)$$

der

k_Q avhenger av duktiliteten

k_S avhenger av grunnforholdene

γ_1 avhenger av konsekvensene ved funksjonssvikt

a_g er spissverdien av grunnens akselerasjon som oppløser normaliseringen av responsspektret som vi diskuterte i avsnitt 5.3

$S_e(T_i)$ er den tilsvarende elastiske pseudoakselerasjonen

$k_{f, spiss}$ avhenger av referanseperioden for a_g

I det følgende gjennomgår vi hver av disse faktorene.

Som tidligere nevnt, medfører det dokumentasjonskrav å anta betydelig duktilitet. Dersom k_Q velges større enn eller lik 0.7 unngås dette. I henhold til ligning (5.10) er k_Q det samme som den normaliserte flytestyrken, og i henhold til ligning (5.15) er $k_Q = \mu^{-1}$ i det hastighet- og forskyvningsensitive området av responsspektret. Bemerk at duktiliteten reduserer hele spektret for pseudoakselerasjon. Figur 5.19 viser at det ikke stemmer med virkeligheten, der effekten av plastiske deformasjoner er mindre for systemer med kort egensvingeperiode enn for systemer med lengre naturlige svingeperioder. I avsnitt 5.4 så vi at et lineært elastisk system har $\mu = 1$. Siden det ikke kreves dokumentasjon for å velge $k_Q = 0.7$ betyr det at bygg i henhold til NS 3491-12 og ligning (5.15) antas å ha en duktilitetsfaktor på minimum 1.43. Det har store konsekvenser for lastvirkningene at denne ikke er lik en, og det at det ikke stilles dokumentasjonskrav til å benytte en så stor verdi av μ viser i hvor stor grad prosjektering for seismiske lastvirkninger fortsatt er knyttet til erfaring.

I avsnitt 4.3 så vi at store dybder til fjell er ugunstig med tanke på lastvirkninger fra jordskjelv, og i avsnitt 4.4 ble det nevnt at egenskapene til de øverste 30 meterne beskriver effekten tilfredsstillende. Faktoren k_S bestemmes nettopp på bakgrunn av de øverste 30 meterne, og som konsekvens av løsmassers ugunstige innvirkning, er k_S stor for dype, dårlige løsmasser. Kun for svært myke grunnforhold tas det hensyn til at disse har større effekt i det hastighetsensitive enn det akselerasjonsensitive området av responsspektret, se avsnitt 4.4. I de fleste tilfellene er k_S konstant, og for konstruksjonen vi betrakter, som er oppført direkte på fjell, er $k_S = 1.0$.

Kontorbygninger tilhører seismisk klasse II som er karakterisert ved at konsekvensene ved sammenbrudd er *middels*. Det betyr at $\gamma_1 = 1.0$.

Spissverdien av grunnens akselerasjon avhenger av den geografiske plasseringen til konstruksjonen. For seismisk klasse I, II og III benyttes en returperiode på 475 år, hvilket for Bergen gir $a_g = 0.93 \text{ m/s}^2$ og $k_{f, spiss} = 0.8$.

Det horisontale, normaliserte elastiske responsspektret for pseudoakselerasjon for berg er gitt som

$$S_e(T) = \begin{cases} 1 + \frac{T}{0.1s} (2.5\eta - 1) & \text{for } 0.00 s \leq T \leq 0.10 s \\ 2.5\eta & \text{for } 0.10 s < T \leq 0.25 s \\ 2.5\eta \frac{0.25s}{T} & \text{for } 0.25 s < T \leq 1.5 s \\ 2.5\eta \frac{0.375s^2}{T^2} & \text{for } 1.5 s < T \leq 4.0 s \end{cases}, \quad (8.38)$$

der η avhenger av dempningsforholdet,

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5 + 100\xi}} \geq 0.55. \quad (8.39)$$

Fra ligning (5.9) ser vi at responsspektret i NS 3491-12 tilsvarer det til et jordskjelv med magnitudo 5.4 fordi $T_D = 1.5 s$.

Det anbefales i NS 3491-12 å benytte $\xi = 0.05$ som gir $\eta = 1.0$. Den maksimale verdien for dempningsforholdet som regelverket tillater, er gitt av ulikheten i ligning (8.39) som $\xi \leq 0.28$, hvilket er svært stort i forhold til de karakteristiske verdiene i tabell 3.1. Det fremkommer av uttrykket for pseudoakselerasjonen at dempningen har liten effekt for systemer (eller moder) med svært korte naturlige svingeperioder, akkurat som vi konkluderte i avsnitt 5.2. I figur 5.8 så vi at dempningsinnflytelse på den relative forskyvningen er neglisjerbar for systemer med lange egensvingeperioder. Denne effekten er ikke medtatt i responsspektret for pseudoakselerasjon fordi det kun er definert for egensvingeperioder som er kortere enn fire sekunder. Tabell 8.1 viser η for ulike dempningsforhold. Her ses det at en økning av dempningsforholdet på f.eks. 1 % har større innflytelse på responsen dersom dempningsforholdet er lite enn hvis det er stort. Også dette stemmer med konklusjonene våre i avsnitt 5.2, se figur 5.2.

Tabell 8.1: Sammenhengen mellom dempningsforholdet (ξ) og faktoren η

ξ	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12
η	1.29	1.20	1.11	1.05	1.00	0.95	0.91	0.88	0.85	0.82	0.79	0.77

Det er ikke gitt noen beskrivelse av hvordan dempningsforholdet bestemmes, så vi benytter de anbefalte 5 % i eksemplet vårt. I henhold til tabell 3.1 er det konservativt for boltet stål siden vi også har valgt $k_Q < 1.0$, og dermed antar at stålets flytespenning overskrides.

For egensvingeperioder som er lengre enn fire sekunder, bestemmes de seismiske lastvirkningene ut ifra responsspektret for den maksimale forskyvningen. Det er svært uvanlig at bygg har så lange egensvingeperioder, og metoden er derfor ikke behandlet i detalj her.

Formen på det normaliserte responsspektret for pseudoakselerasjonen stemmer med den som er vist i figur 5.14, i alle områder bortsett fra at pseudoakselerasjonen ikke er konstant for de svært korte egensvingeperioder. Den øker derimot proporsjonalt med T for $0 s < T \leq 0.1 s$. Deretter følger forløpet det i figur 5.14. Pseudoakselerasjonen er konstant for $0.1 s < T \leq 0.25 s$, så systemer med egensvingeperioder kortere enn et kvart sekund tilhører det akselerasjonsensitive området. For egensvingeperioder i området $0.25 s < T \leq 1.5 s$ er pseudoakselerasjonen proporsjonal med T^{-1} , hvilket betyr at pseudohastigheten er konstant. Systemer med egensvingeperioder i dette området tilhører altså det hastighetsensitive området. For $1.5 s < T \leq 4 s$ er

pseudoakselerasjonen proporsjonal med T^{-2} , så her er den maksimale forskyvningen konstant, og systemer med egensvingeperioder som er større enn 1.5 s , er forskyvningsensitive. I området $4.0\text{ s} < T \leq 10\text{ s}$ reduseres den maksimale forskyvningen proporsjonalt med T , og for $T > 10\text{ s}$ er D igjen konstant.

Innsetting av $\eta = 1.0$ og egensvingeperiodene fra ligning (8.20) i ligning (8.38) gir den normaliserte pseudoakselerasjonen for konstruksjonens egensvingeperioder i x -retning,

$$S_e(T_{1x}) = S_e(0.936\text{ s}) = 2.5 \eta \frac{0.25\text{ s}}{T_{1x}} = 2.5 \cdot 1.0 \frac{0.25\text{ s}}{0.936\text{ s}} = 0.67, \quad (8.40)$$

$$S_e(T_{2x}) = S_e(0.323\text{ s}) = 2.5 \eta \frac{0.25\text{ s}}{T_{2x}} = 2.5 \cdot 1.0 \frac{0.25\text{ s}}{0.323\text{ s}} = 1.93, \quad (8.41)$$

$$S_e(T_{3x}) = S_e(0.211\text{ s}) = 2.5 \eta = 2.5 \cdot 1.0 = 2.5, \quad (8.42)$$

$$S_e(T_{4x}) = S_e(0.173\text{ s}) = 2.5 \eta = 2.5 \cdot 1.0 = 2.5. \quad (8.43)$$

Ligning (8.37) gir dermed

$$S_{ed}(T_{1x}) = k_Q k_S \gamma_1 a_g S_e(T_{1x}) k_{f,spiss} = 0.7 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 0.93\text{ m/s}^2 \cdot 0.67 \cdot 0.8 = 0.35\text{ m/s}^2, \quad (8.44)$$

$$S_{ed}(T_{2x}) = 0.7 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 0.93\text{ m/s}^2 \cdot 1.93 \cdot 0.8 = 1.01\text{ m/s}^2, \quad (8.45)$$

$$S_{ed}(T_{3x}) = 0.7 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 0.93\text{ m/s}^2 \cdot 2.5 \cdot 0.8 = 1.30\text{ m/s}^2, \quad (8.46)$$

$$S_{ed}(T_{4x}) = 0.7 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 0.93\text{ m/s}^2 \cdot 2.5 \cdot 0.8 = 1.30\text{ m/s}^2. \quad (8.47)$$

Designspektret er vist i figur 8.9. De maksimale, tilsvarende statiske lastene finnes fra ligning (3.32) og (3.33).

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k(t) = \sum_{k=1}^n \frac{L_k}{M_k} \mathbf{m} \phi_k S_{ed}(T).$$

Ligning (8.9), (8.21), (8.23), (8.24) og (8.44) til (8.47) innsettes. Det gir

$$\mathbf{F}_{1x, maks} = \frac{L_{1x}}{M_{1x}} \mathbf{m} \phi_{1x} S_{ed}(T_{1x}) = [121 \quad 113 \quad 85 \quad 46]^T \text{ kN}. \quad (8.48)$$

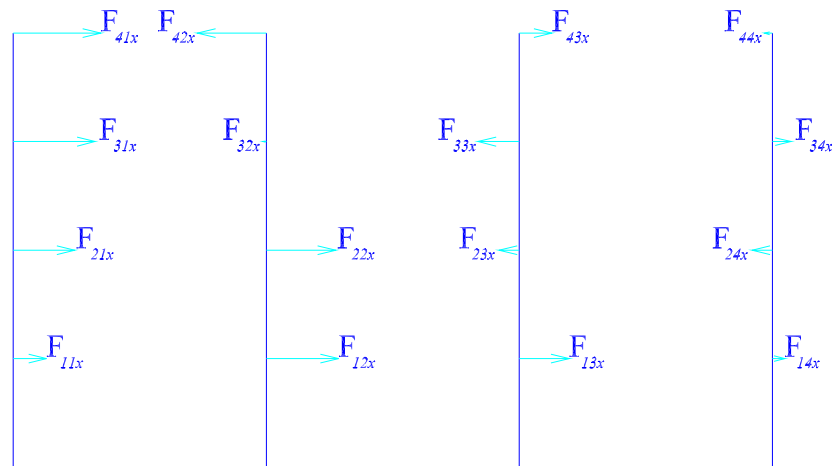
$$\mathbf{F}_{2x, maks} = \frac{L_{2x}}{M_{2x}} \mathbf{m} \phi_{2x} S_{ed}(T_{2x}) = [-94 \quad -5 \quad 96 \quad 100]^T \text{ kN}. \quad (8.49)$$

$$\mathbf{F}_{3x, maks} = \frac{L_{3x}}{M_{3x}} \mathbf{m} \phi_{3x} S_{ed}(T_{3x}) = [45 \quad -57 \quad -28 \quad 69]^T \text{ kN}. \quad (8.50)$$

$$\mathbf{F}_{4x, maks} = \frac{L_{4x}}{M_{4x}} \mathbf{m} \phi_{4x} S_{ed}(T_{4x}) = [-11 \quad 26 \quad -28 \quad 17]^T \text{ kN}. \quad (8.51)$$

Disse er illustrert i figur 8.7. Her ser vi som forventet, at lastene fra de to første modene er dominerende, og at bidragene fra de høyere modene har størst innflytelse på lastvirkningene i de øverste etasjene.

Vi skal nå kombinere de tilsvarende statiske lastene for å beregne den maksimale skjærkraften som opptrer i hver etasje, samt det maksimale momentet om y -aksen ved terrengnivå. Her er det



Figur 8.7: De tilsvarende statiske lastene fra ligning (8.48) til (8.51). Det kommer frem at de lavere modene gir størst lastvirkninger

to faktorer som er viktige. For det første må det tas stilling til hvor mange modene som skal medtas i beregningen. For det andre skal det vurderes hvilken kombinasjonsregel som skal benyttes, SRSS eller CQC.

NS 3491-12 foreskriver to regler for hvor mange modene som skal medtas i en beregning. Enten skal summen av de effektive modale massene til de betraktete modene være større enn 90 % av konstruksjonens totale masse, eller alle modene med større effektiv modal masse enn 5 % av konstruksjonens totale masse skal tas med. Det er bemerkelsesverdig at reglene utelukkende tar for seg den effektive modale massen. Denne angir som tidligere vist, massen til en-frihetsgradsystemet med skjærkraftforløp ved terreng tilsvarende det til den aktuelle moden, se ligning (3.39). Høyere modene vil generelt ha relativt liten effektiv modal masse fordi utslagene virker mot hverandre. Som vi senere skal se, har de høyere modene stor innflytelse på skjærkreftene i de øverste etasjene, men disse effektene kan vi risikere ikke å få med oss hvis modene med lav effektiv modal masse neglisjeres. Grunnen til at regelverket likevel har valgt å benytte den effektive modale massen som utgangspunkt for utvelgelsen av modene, er sannsynligvis at den er enkel å relatere en fysisk størrelse til (skjærkraften ved grunnivå), den kan angis relativt fordi summen av de effektive modale massene er lik konstruksjonens totale masse, og ikke minst fordi den effektive modale massen gir et inntrykk av størrelsesordenen på responsen fra hver mode. Dersom en mode har svært liten effektiv modal masse vil den i de fleste tilfeller ikke medføre utslagsgivende lastvirkninger. Slik er situasjonen for bygg som ikke er symmetriske, og derfor ikke har antisymmetriske svingeformer. Dette problemet diskuterer vi ved ligning (11.7). De fleste bygg er ikke symmetriske, og modene som er viktige for en respons, vil derfor vanligvis ha betydelig effektiv modal masse. Begge reglene for antall modene medfører at vi i vårt eksempel skal ta med de to første, men som vi skal se i kapittel 17, kan det i mer kompliserte konstruksjoner være vanskelig å komme opp i tilstrekkelig effektiv modal masse. I kapittel 16 skal vi undersøke konsekvensene av ikke å ta hensyn til så mye effektiv modal masse som foreskrives i regelverket.

Når det kommer til kombinasjonsregler, krever NS 3491-12 at en mer nøyaktig metode enn SRSS

benyttes når

$$\frac{T_j}{T_l} > 0.9, \quad T_j < T_l. \quad (8.52)$$

Kravet fra utledningen i [18], se ligning (6.54), er

$$\frac{T_j}{T_l} < \frac{0.1}{\xi + 0.1}, \quad T_j < T_l.$$

Som tidligere nevnt, er dempningsforholdet sin standardverdi 5 %, hvilket gir

$$\frac{T_j}{T_l} < \frac{0.1}{0.05 + 0.1} = 0.67, \quad T_j < T_l. \quad (8.53)$$

NS 3491-12 tillater altså å benytte SRSS i situasjoner der kryssleddene har relativt stor innflytelse på resultatet.

I vårt eksempel er

$$\frac{T_{2x}}{T_{1x}} = \frac{0.323}{0.936} = 0.35 < 0.9.$$

Det betyr at SRSS kan benyttes, både i henhold til NS 3491-12 og utledningen i [18].

Vi skal i det følgende gjennomføre to analyser av lastene i vindkryssene. Den første følger kravene i NS 3491-12. Dvs. at vi kun tar med bidragene fra de to første modene og at vi benytter SRSS. I den andre analysen tar vi hensyn til alle modene og benytter CQC. Dermed får vi et bilde av konsekvensene av forenklingene i NS 3491-12.

Den maksimale skjærkraften i hver etasje fra hver mode finnes fra de tilsvarende statiske lastene i ligning (8.48) til (8.51),

$$\mathbf{V}_{1x, maks} = \begin{bmatrix} V_{41x, maks} \\ V_{31x, maks} \\ V_{21x, maks} \\ V_{11x, maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 121 \\ 121 + 113 \\ 121 + 113 + 85 \\ 121 + 113 + 85 + 46 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 121 \\ 235 \\ 319 \\ 365 \end{bmatrix} kN, \quad (8.54)$$

$$\mathbf{V}_{2x, maks} = \begin{bmatrix} V_{42x, maks} \\ V_{32x, maks} \\ V_{22x, maks} \\ V_{12x, maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -94 \\ -94 - 5 \\ -94 - 5 + 96 \\ -94 - 5 + 96 + 100 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} -94 \\ -100 \\ -4 \\ 96 \end{bmatrix} kN, \quad (8.55)$$

$$\mathbf{V}_{3x, maks} = \begin{bmatrix} V_{43x, maks} \\ V_{33x, maks} \\ V_{23x, maks} \\ V_{13x, maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 45 - 57 \\ 45 - 57 - 28 \\ 45 - 57 - 28 + 69 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 45 \\ -12 \\ -40 \\ 28 \end{bmatrix} kN, \quad (8.56)$$

$$\mathbf{V}_{4x, maks} = \begin{bmatrix} V_{44x, maks} \\ V_{34x, maks} \\ V_{24x, maks} \\ V_{14x, maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -11 + 26 \\ -11 + 26 - 28 \\ -11 + 26 - 28 + 17 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} -11 \\ 15 \\ -13 \\ 5 \end{bmatrix} kN. \quad (8.57)$$

Det maksimale momentet ved terrengnivå om y -aksen fra hver mode blir

$$M_{1y, maks} = (121 \cdot 12 + 113 \cdot 9 + 85 \cdot 6 + 46 \cdot 3) \text{ kNm} = 3.1 \cdot 10^3 \text{ kNm}, \quad (8.58)$$

$$M_{2y, maks} = (-94 \cdot 12 - 5 \cdot 9 + 96 \cdot 6 + 100 \cdot 3) \text{ kNm} = -0.31 \cdot 10^3 \text{ kNm}, \quad (8.59)$$

$$M_{3y, maks} = (45 \cdot 12 - 57 \cdot 9 - 28 \cdot 6 + 69 \cdot 3) \text{ kNm} = 61 \text{ kNm}, \quad (8.60)$$

$$M_{4y, maks} = (-11 \cdot 12 + 26 \cdot 9 - 28 \cdot 6 + 17 \cdot 3) \text{ kNm} = -10 \text{ kNm}. \quad (8.61)$$

Ligning (8.54) til (8.61) viser som forventet, at de høyere modenes innflytelse er størst på skjærkraften i den øverste etasjen, liten for skjærkraften ved terrengnivå og neglisjerbar for momentet ved grunnivå.

Når vi benytter SRSS på den maksimale skjærkraften fra de to første modene, får vi følgende maksimal total skjærkraft i hver etasje:

$$V_{maks, x, 2 \text{ moder}, SRSS} = \begin{bmatrix} \sqrt{V_{41x, maks}^2 + V_{42x, maks}^2} \\ \sqrt{V_{31x, maks}^2 + V_{32x, maks}^2} \\ \sqrt{V_{21x, maks}^2 + V_{22x, maks}^2} \\ \sqrt{V_{11x, maks}^2 + V_{12x, maks}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 154 \\ 255 \\ 319 \\ 377 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (8.62)$$

Det maksimale momentet blir tilsvarende

$$M_{y, maks, 2 \text{ moder}, SRSS} = \sqrt{M_{1y, maks}^2 + M_{2y, maks}^2} = 3.1 \cdot 10^3 \text{ kNm}. \quad (8.63)$$

Når vi i stedet skal benytte CQC på alle fire moder, må vi kjenne korrelasjonskoeffisientene til disse. De finnes fra ligning (6.48) og (8.20) med $\xi = 0.05$.

$$\frac{T_{2x}}{T_{1x}} = 0.35 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{12x} = \frac{8 \cdot \xi^2 (1 + \frac{T_{2x}}{T_{1x}})(\frac{T_{2x}}{T_{1x}})^{3/2}}{(1 - (\frac{T_{2x}}{T_{1x}})^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \frac{T_{2x}}{T_{1x}} (1 + \frac{T_{2x}}{T_{1x}})^2} = 0.007 \quad (8.64)$$

På samme vis får vi

$$\rho_{13x} = 0.003, \quad \rho_{14x} = 0.002, \quad \rho_{23x} = 0.051, \quad \rho_{24x} = 0.023, \quad \rho_{34x} = 0.197. \quad (8.65)$$

Definisjonen av korrelasjonskoeffisienten medfører at $\rho_{kk} = 1$. Den eneste korrelasjonsfaktoren som ikke er neglisjerbar, er ρ_{34x} . Siden denne hører til de to høyeste modene, som har liten innflytelse på den totale responsen, vil kryssleddene i dette eksemplet ha liten effekt. Vi fortsetter likevel med CQC for å få et mest mulig korrekt resultat til sammenlikningen. Komplett kvadratisk kombinasjon av skjærkraftene i hver etasje gir

$$V_{maks, x, 4 \text{ moder}, CQC} = \begin{bmatrix} 158 \\ 255 \\ 322 \\ 380 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (8.66)$$

Det maksimale momentet blir tilsvarende

$$M_{y, maks, 4moder, CQC} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \rho_{ij} M_{iy, maks} M_{jy, maks}} = 3.1 \cdot 10^3 \text{ kNm}. \quad (8.67)$$

Som forventet, har de høyere modene størst innflytelse på skjærkraften i den øverste etasjen. En sammenlikning av resultatene i ligning (8.62) og (8.66) viser at avviket mellom resultatene fra de to kombinasjonsmetodene er på 3 %. I den nederste etasjen er avviket til skjærkraften 0.6 %, og avviket til momentet ved terrengnivå, som beregnes fra ligning (8.63) og (8.67), er på bare 0.05 %. Det største avviket mellom de to metodene er altså på under 5 %, hvilket må betraktes som negliserbart. Det er dermed ikke i dette tilfellet nødvendig å bruke den ekstra tiden det tar å kombinere alle modene ved CQC.

Før vi går over til å gjennomføre analysen i y -retning, beregnes den dimensjonerende horisontale kraften i hvert vindkryss i x -retning. Resultatet skal vi senere sammenlikne med de vi finner ved bruk av andre analysemetoder. Siden det er to vindkryss i x -retning, må hvert vindkryss i en gitt etasje ta opp halvparten av den totale skjærkraften i den etasjen. Det betyr at

$$\mathbf{H}_{vk, x} = \frac{1}{2} \mathbf{V}_{maks, x, 4moder, CQC} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 158 \\ 255 \\ 322 \\ 380 \end{bmatrix} \text{ kN} = \begin{bmatrix} 79 \\ 127 \\ 161 \\ 190 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (8.68)$$

der rad k i $\mathbf{H}_{vk, x}$ angir horisontallasten i ett vindkryss i etasje k .

Nå utfører vi de samme beregningene for responsen ved grunnakselerasjon i y -retning.

Den normaliserte pseudoakselerasjonen for konstruksjonens egensvingeperioder i y -retning regnes fra ligning (8.30) og (8.38) med $\xi = 0.05$. Det gir

$$S_e(T_{1y}) = 0.95, \quad S_e(T_{2y}) = 2.5, \quad S_e(T_{3y}) = 2.5 \quad \text{og} \quad S_e(T_{4y}) = 2.5.$$

Ligning (8.37) gir dermed

$$\begin{aligned} S_{ed}(T_{1y}) &= 0.49 \text{ m/s}^2, & S_{ed}(T_{2y}) &= 1.30 \text{ m/s}^2, \\ S_{ed}(T_{3y}) &= 1.30 \text{ m/s}^2 & \text{og} & \quad S_{ed}(T_{4y}) = 1.30 \text{ m/s}^2. \end{aligned} \quad (8.69)$$

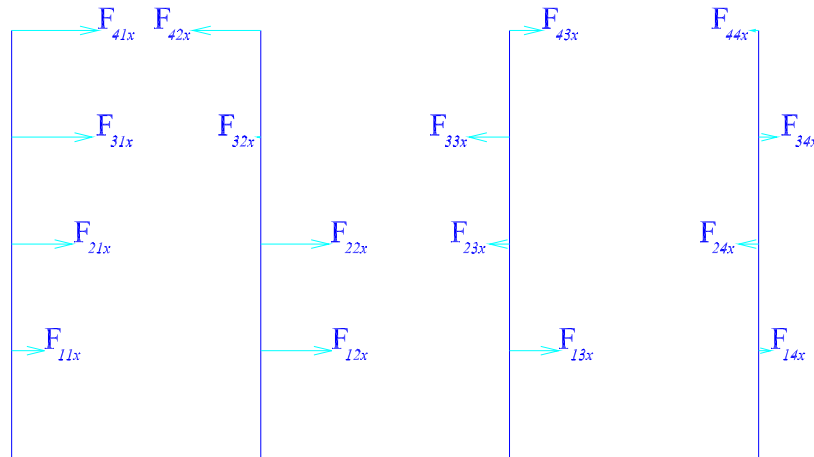
De maksimale, tilsvarende statiske lastene finnes fra ligning (3.32), (3.33), (8.9), (8.31), (8.32), (8.33) og (8.69):

$$\mathbf{F}_{1y, maks} = \frac{L_{1y}}{M_{1y}} \mathbf{m} \phi_{1y} S_{ed}(T_{1y}) = [172 \quad 161 \quad 120 \quad 64]^T \text{ kN}. \quad (8.70)$$

$$\mathbf{F}_{2y, maks} = \frac{L_{2y}}{M_{2y}} \mathbf{m} \phi_{2y} S_{ed}(T_{2y}) = [-123 \quad -6 \quad 125 \quad 129]^T \text{ kN}. \quad (8.71)$$

$$\mathbf{F}_{3y, maks} = \frac{L_{3y}}{M_{3y}} \mathbf{m} \phi_{3y} S_{ed}(T_{3y}) = [45 \quad -59 \quad -27 \quad 69]^T \text{ kN}. \quad (8.72)$$

$$\mathbf{F}_{4y, maks} = \frac{L_{4y}}{M_{4y}} \mathbf{m} \phi_{4y} S_{ed}(T_{4y}) = [-11 \quad 25 \quad -27 \quad 17]^T \text{ kN}. \quad (8.73)$$



Figur 8.8: De tilsvarende statiske lastene fra ligning (8.70) til (8.73). Det kommer frem at de lavere modene gir størst lastvirkninger, og en sammenlikning med figur 8.7 viser at den første moden er mer dominerende i y - enn x -retning

Lastene i ligning (8.70) til (8.73) er illustrert i figur 8.8. Ved sammenlikning av denne med figur 8.7 ser vi at særlig den første moden i y -retning gir større respons enn den første moden i x -retning. Årsaken er at bygget er stivere i y -retning og den første moden i begge retninger tilhører det hastighetsensitive området i designspektret.

For å kunne kombinere de tilsvarende statiske lastene til den maksimale skjærkraften som opptrer i hver etasje, og det maksimale momentet ved terrengnivå, må vi undersøke hvor mange moder som skal medtas i beregningen, samt hvilken kombinasjonsregel som skal benyttes, SRSS eller CQC. Vi utfører igjen to analyser av de resulterende lastene, der den første følger kravene i NS 3491-12 mens den andre tar med bidragene fra alle modene som kombineres ved CQC.

I henhold til eurokoden kan vi neglisjere de to siste modene siden summen av de effektive modale massene til de to første modene er større enn 90 % av konstruksjonens totale masse.

Når det kommer til valget av kombinasjonsregel må vi undersøke forholdet mellom egensvingeperiodene som er gitt i ligning (8.30).

$$\frac{T_{2y}}{T_{1y}} = \frac{0.229}{0.659} = 0.35 < 0.9.$$

Det betyr at kryssleddet har liten innflytelse på resultatene, så SRSS kan benyttes.

Den maksimale skjærkraften i hver etasje fra hver mode er som følger:

$$\mathbf{V}_{1y, maks} = \begin{bmatrix} V_{41y, maks} \\ V_{31y, maks} \\ V_{21y, maks} \\ V_{11y, maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 172 \\ 172 + 161 \\ 172 + 161 + 120 \\ 172 + 161 + 120 + 64 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 172 \\ 333 \\ 453 \\ 517 \end{bmatrix} kN, \quad (8.74)$$

$$\mathbf{V}_{2y, maks} = \begin{bmatrix} V_{42y, maks} \\ V_{32y, maks} \\ V_{22y, maks} \\ V_{12y, maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -123 \\ -123 - 6 \\ -123 - 6 + 125 \\ -123 - 6 + 125 + 129 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} -123 \\ -129 \\ -4 \\ 125 \end{bmatrix} kN, \quad (8.75)$$

$$\mathbf{V}_{3y, maks} = \begin{bmatrix} V_{43y, maks} \\ V_{33y, maks} \\ V_{23y, maks} \\ V_{13y, maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 45 - 59 \\ 45 - 59 - 27 \\ 45 - 59 - 27 + 69 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 45 \\ -13 \\ -40 \\ 29 \end{bmatrix} kN, \quad (8.76)$$

$$\mathbf{V}_{4y, maks} = \begin{bmatrix} V_{44y, maks} \\ V_{34y, maks} \\ V_{24y, maks} \\ V_{14y, maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -11 + 25 \\ -11 + 25 - 27 \\ -11 + 25 - 27 + 17 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} -11 \\ 14 \\ -13 \\ 4 \end{bmatrix} kN. \quad (8.77)$$

Det maksimale momentet ved terrengnivå om x -aksen fra hver mode blir

$$M_{1x, maks} = (172 \cdot 12 + 161 \cdot 9 + 120 \cdot 6 + 64 \cdot 3) kNm = 4.4 \cdot 10^3 kNm, \quad (8.78)$$

$$M_{2x, maks} = (-123 \cdot 12 - 6 \cdot 9 + 125 \cdot 6 + 129 \cdot 3) kNm = -0.39 \cdot 10^3 kNm, \quad (8.79)$$

$$M_{3x, maks} = (45 \cdot 12 - 59 \cdot 9 - 27 \cdot 6 + 69 \cdot 3) kNm = 61 kNm, \quad (8.80)$$

$$M_{4x, maks} = (-11 \cdot 12 + 25 \cdot 9 - 27 \cdot 6 + 17 \cdot 3) kNm = -16 kNm. \quad (8.81)$$

Fra ligning (8.74) til (8.81) ser vi igjen at innflytelsen til de høyere modene er størst for skjærkraften i den øverste etasjen, liten for skjærkraften ved terrengnivå og neglisjerbar for momentet ved grunnnivå.

Når vi benytter SRSS på den maksimale skjærkraften fra de to første modene får vi følgende maksimal total skjærkraft i hver etasje:

$$\mathbf{V}_{maks, y, 2\text{ moder}, SRSS} = \begin{bmatrix} 212 \\ 357 \\ 453 \\ 532 \end{bmatrix} kN. \quad (8.82)$$

Det maksimale momentet beregnes på samme vis,

$$M_{x, maks, 2\text{ moder}, SRSS} = 4.4 \cdot 10^3 kNm. \quad (8.83)$$

Nå går vi over til analysen med CQC på alle fire moder. Først beregnes korrelasjonskoeffisientene fra ligning (6.48) og (8.30) med $\xi = 0.05$. Det gir

$$\frac{T_{2y}}{T_{1y}} = \frac{0.229}{0.659} = 0.35 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{12y} = 0.007 \quad (8.84)$$

På samme vis får vi

$$\rho_{13y} = 0.003, \quad \rho_{14y} = 0.002, \quad \rho_{23y} = 0.051, \quad \rho_{24y} = 0.023, \quad \rho_{34x} = 0.197. \quad (8.85)$$

En sammenlikning av ligning (8.65) og (8.85) viser at korrelasjonskoeffisientene er nesten like for modene i x - og y -retning. Det skyldes at forholdet mellom egensvingeperiodene i de to retningene er tilnærmet konstant, se diskusjonen under ligning (8.36).

Komplett kvadratisk kombinasjon av skjærkreftene i hver etasje fra alle moder gir

$$\mathbf{V}_{maks,y,4\text{ moder},CQC} = \begin{bmatrix} 215 \\ 357 \\ 455 \\ 534 \end{bmatrix} kN. \quad (8.86)$$

Det maksimale momentet beregnes på samme vis. Resultatet er

$$M_{x,maks,4\text{ moder},CQC} = 4.4 \cdot 10^3 kNm. \quad (8.87)$$

De høyere modene har altså også i y -retning størst innflytelse på skjærkraften i den øverste etasjen, akkurat som forventet. Det fremgår ved sammenlikning av ligning (8.82) til (8.83) med ligning (8.86) til (8.87). For skjærkraften i den øverste etasjen er avviket mellom resultatene fra de to kombinasjonsmetodene 1 %. I den nederste etasjen er avviket til skjærkraften 0.4 %, og avviket til momentet ved terrengnivå er på bare 0.06 %. Avviket mellom de to kombinasjonsmetodene er altså generelt større i x -retning (3, 0.6 og 0.05 %) enn i y -retning. Årsaken er at pseudoakselerasjonen til den første moden i y -retning er større enn den er for den første moden i x -retning. Derfor er den første moden mer dominerende i y - enn i x -retning, og dermed blir konsekvensene ved å neglisere de høyere modene mindre. Avvikene mellom resultatene som oppnås ved bruk av CQC på alle moder, og de som fås ved bruk av SRSS på modene som til sammen har større effektiv modal masse enn 90 % av konstruksjonens totale masse, er uansett liten. Dette trass i at NS 3491-12 tillater bruk av SRSS i tilfeller der kryssledd modene imellom er viktig ifølge den matematiske utledningen. Årsaken er i vårt tilfelle for det første at lengden på den første og andre egensvingeperioden er ganske forskjellig både i x - og y -retning. For det andre har kryssleddene generelt varierende fortegn, og vil derfor jevne hverandre ut ved summasjon.

Til slutt beregnes den horisontale lasten i hvert vindkryss i y -retning, for at vi senere skal kunne sammenlikne resultatet med de vi finner ved bruk av andre analysemetoder og eurokoden. Siden det er fire vindkryss i hver etasje i y -retning, må hvert vindkryss i en gitt etasje ta opp en fjerdepart av den totale skjærkraften i den etasjen. Dermed blir

$$\mathbf{H}_{vk,y} = \frac{1}{4} \mathbf{V}_{maks,y,4\text{ moder},CQC} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 215 \\ 357 \\ 455 \\ 534 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 54 \\ 89 \\ 114 \\ 134 \end{bmatrix} kN, \quad (8.88)$$

der rad k i $\mathbf{H}_{vk,y}$ angir horisontallasten i ett vindkryss orientert i y -retning i etasje k . Stivheten er større i y -retning enn i x -retning, så pseudoakselerasjonen er også størst i y -retning. Likevel er belastningen på hvert vindkryss i y -retning mindre enn horisontallasten på hvert vindkryss i x -retning, se ligning (8.68) og (8.88). Det gjelder for samtlige vindkryss, og skaper tvil om korrektheten av utelatelseskriteriet som er nevnt tidligere, og her siteres direkte fra punkt 4.1:

Dersom $S_d \leq 0.5 m/s^2$ i det egensvingeområdet som gir vesentlig bidrag til responsen, kreves normalt ikke påvisning av kapasitet for seismisk påvirkning.

Beregningen vi akkurat har gjennomført viser at en spesifikk verdi av den dimensjonerende pseudoakselerasjonen, for eksempel $S_d \leq 0.5 m/s^2$, ikke avspeiles direkte i lasten de avstivende elementene må ta opp.

8.4 Regelverket NS-EN 1998-1

Det nasjonale tillegget til eurokoden for prosjektering for seismisk påvirkning utkom i 2008, og dermed ble NS-EN 1998-1 sidestilt NS 3491-12 som gjeldende norsk regelverk. Vi begynner dette avsnittet med å se litt på noen viktige deler av eurokoden før vi går over til å beregne responsen for konstruksjonen vår.

I henhold til eurokoden kan det ses bort fra seismisk påvirkning i tilfeller med *svært lav seismisitet*. Det nasjonale tillegget inneholder bestemmelser for hvordan dette defineres. En av disse bestemmelsene tilsvarer nesten det i NS 3491-12, nemlig at pseudoakselerasjonen er lavere enn 0.49 m/s^2 . Forskjellen mellom de to er at det i NS 3491-12 kun er de viktigste modene som skal overholde kravet, mens det i henhold til eurokoden skal tilfredsstilles av alle modene som medtas i beregningen. En annen bestemmelse går på den dimensjonerende grunnakselerasjonen ved terreng. Alle utelatelseskriteriene tar hensyn til bruken av byggverket. Sykehus og viktig infrastruktur dimensjoneres f.eks. for større grunnakselerasjon enn skoler som igjen skal tåle større grunnakselerasjon enn kontorbygg.

Den dimensjonerende pseudoakselerasjonen er som i NS 3491-12, basert på grunnens maksimale akselerasjon med en returperiode på 475 år. Det tilsvarer 10 % sannsynlighet for overskridelse på 50 år. Samtidig anbefaler eurokoden, av hensyn til skadebegrensning ved middels store jordskjelv, å dimensjonere for bruksgrensetilstand med en returperiode på 95 år, hvilket tilsvarer 10 % sannsynlighet for overskridelse på 10 år. Det norske tillegget går imot den siste anbefalingen i punkt NA.2.1 som lyder

(...) Det stilles ikke krav om påvisning av skadebegrensning i Norge.

Argumentet er sannsynligvis at jordskjelvsbelasningen i Norge er såpass liten at et jordskjelv med returperiode 95 år ikke vil gi nevneverdige laster. Utelatelsen betyr at det kun utføres kontroll i ulykkesgrensetilstand ved prosjektering for seismiske påvirkninger. Dermed sikres den materialistiske verdien til komponenter i byggverket (så som lettvegger og lysekroner) ikke for lastvirkningene fra vanlige jordskjelv. Det er derfor anbefalelsesverdig å dimensjonere for strengere krav enn de regelverket stiller ved prosjektering av byggverk som, enten i seg selv eller i kraft av sin funksjon, innehar stor materialistisk verdi [1].

Som i NS 3491-12, er det også i NS-EN 1998-1 gitt rom for å se bort fra den vertikale komponenten til jordskjelv. Det er gjort på bakgrunn av de samme argumentene som ble nevnt i avsnittet om NS 3491-12. Regelverkene er derimot ikke samstemte når det kommer til andre ordens effekter. Disse nevnes ikke i NS 3491-12, mens NS-EN 1998-1 krever at det tas hensyn til disse dersom de har mer enn 10 % innflytelse på resultatene.

Eurokoden inneholder i motsetning til NS 3491-12 ikke linær elastisk tidshistorieanalyse. Tidshistorieanalyser må altså utføres ikke-lineært. Bortsett fra denne forskjellen er analysemetodene i NS-EN 1998-1 og NS 3491-12 svært like. En forskjell er at man i henhold til eurokoden ved tidshistorieanalyse kan velge å benytte middelveiden av lastvirkningen fra syv grunnakselerasjons-

forløp i stedet for den ugunstigste fra tre. Det stilles også mer konkrete krav til en konstruksjon for at den skal kunne analyseres ved tverrkraftmetoden. Alle konstruksjoner kan derimot prosjekteres ut fra en tredimensjonal analyse, noe som anbefales på bakgrunn av de samme argumentene som er gitt i avsnitt 8.4. Dersom MPA velges, må lastfordelingen fra både punkt 1 og 3 i avsnitt 6.8 beregnes og den ugunstigste legges til grunn for lastvirkningene. I NS 3491-12 kreves det kun å benytte en enkelt lastfordeling.

I avsnitt 8.3 er det nevnt at en todimensjonal modal analyse med kun horisontale frihetsgrader i hver etasje inneholder flere feilkilder også for dobbeltsymmetriske bygg. Avvikene skyldes både at dekkene ikke er fullstendig stive og at det vil oppstå torsjon. Vi skal fortsatt benytte resultatene fra avsnitt 8.2, så beregningene i dette avsnittet neglisjerer også deformasjonene av dekkene, men som vi skal se senere, tar eurokoden hensyn til utilsiktet eksentrisitet.

Nå begynner vi å beregne responsen til konstruksjonen i figur 7.1 utsatt for et dimensjonerende jordskjelv i henhold til NS-EN 1998-1. Her der designspektret for pseudoakselerasjon gitt som

$$S_{ed}(T) = \begin{cases} a_g S \left(\frac{2}{3} + \frac{T}{T_B} \left(2.5 q^{-1} - \frac{2}{3} \right) \right) & \text{for } 0 \leq T \leq T_B \\ 2.5 a_g S q^{-1} & \text{for } T_B \leq T \leq T_C \\ 2.5 a_g S q^{-1} T_C T^{-1} & \text{for } T_C \leq T \leq T_D \\ 2.5 a_g S q^{-1} T_C T_D T^{-2} & \text{for } T_D \leq T \end{cases}, \quad (8.89)$$

med minimumskravet

$$S_{ed}(T) \geq 0.2 a_g. \quad (8.90)$$

I ligning (8.89) er

a_g den dimensjonerende grunnakselerasjonen på fjell

S en forsterkningsfaktor som avhenger av grunnforholdene

q konstruksjonsfaktoren som avhenger av konstruksjonens duktilitet. Basert på ligning (5.15) sammenliknes denne best med duktilitetsfaktoren μ , men den tar også hensyn til andre dempningsforhold enn de 5 % som ligger til grunn for spektret

T_B er egensvingeperioden ved overgangen til konstant pseudoakselerasjon, og avhenger av grunnforholdene

T_C er egensvingeperioden ved overgangen fra det akselerasjonsensitive til det hastighetsensitive området og avhenger av grunnforholdene

T_D er egensvingeperioden ved overgangen fra det hastighetsensitive til det forskyvningsensitive området. Denne er gitt som 1.5 s i det nasjonale tillegget, og designspektret angir dermed jordskjelv med magnitudo 5.4 i henhold til ligning (5.9). Magnituden på jordskjelvene som det dimensjoneres for i henhold til eurokoden og NS 3491-12, er dermed lik, se ligning (8.38)

Det er bemerkelsesverdig at designspektret i ligning (8.89) angir $S_{ed}(0 s) = \frac{2}{3} a_g S$. Ved figur 5.4 så vi at grenseverdien i teorien er lik $a_g S$. Det er den verdien som er benyttet i NS 3491-12,

se ligning (8.38). Denne forskjellen i regelverkene vil slå ut for ekstremt stive bygg som f. eks. murkonstruksjoner.

Den dimensjonerende grunnakselerasjonen på fjell, a_g , avhenger av konstruksjonens bruksformål og geografiske plassering. For et kontorbygg i Bergen er $a_g = 0.744 \text{ m/s}^2$. Dette stemmer nøyaktig med $\gamma_1 a_g k_{f, spiss}$ for NS 3491-12. Denne sammenhengen er alltid gyldig for byggverk der konsekvensene ved sammenbrudd ikke er voldsomme.

Konstruksjonsfaktoren q er lik 1.5 for konstruksjoner med lav duktilitet. For høyere verdier av q kreves det dokumentasjon av konstruksjonens duktilitet. Som NS 3491-12, gir eurokoden altså også tillastelse til å velge $\mu > 1$ uten å dokumentere valget. I størsteparten av responsspektret deles lastvirkningene på q , og det gir en stor reduksjon i lasten. En prosjekterende ingeniør bør legge merke til hva det sier om nøyaktigheten til resultatene i siste ende, men det er dermed ikke sagt at det ikke er viktig å sørge for at beregningene utføres med tilstrekkelig antall betydende sifre. Lastene som beregnes i henhold til regelverket, skal kunne tas opp av konstruksjonen uansett om regelverket benytter svært generaliserende formler. Konstruksjonsfaktorens innvirkning på ligning (8.89) viser at det i NS-EN 1998-1 tas hensyn til at effekten av dempning og plastiske deformasjoner er mindre for et system med kort egensvingeperiode enn for et med lengre naturlig svingeperiode, se figur 5.2 og 5.19.

Både S og T_C er større for myk enn fast grunn. Det tas dermed hensyn til at forskjellen mellom responsspektrene for to forskjellige grunnforhold er større i det hastighetsensitive området enn i det akselerasjonsensitive, se avsnitt 4.4. Byggverket vi undersøker er fundamentert direkte på fjell. Det medfører at $S = 1.0$, $T_B = 0.10 \text{ s}$ og $T_C = 0.25 \text{ s}$ ifølge det nasjonale tillegget, hvilket betyr at knekkpunktene i kurven for den dimensjonerende pseudoakselerasjonen er plassert likt i henhold til NS 3491-12 og NS-EN 1998-1 for disse grunnforholdene.

Parametrene vi akkurat har funnet og egensvingeperiodene fra ligning (8.20) innsettes i ligning (8.89), hvilket gir

$$S_{ed}(T_{1x}) = S_{ed}(0.936 \text{ s}) = a_g S \frac{2.5 T_C}{q T_{1x}} = 0.744 \cdot 1.0 \cdot \frac{2.5 \cdot 0.25}{1.5 \cdot 0.936} \text{ m/s}^2 = 0.33 \text{ m/s}^2, \quad (8.91)$$

$$S_{ed}(T_{2x}) = S_{ed}(0.323 \text{ s}) = a_g S \frac{2.5 T_C}{q T_{2x}} = 0.744 \cdot 1.0 \cdot \frac{2.5 \cdot 0.25}{1.5 \cdot 0.323} \text{ m/s}^2 = 0.96 \text{ m/s}^2, \quad (8.92)$$

$$S_{ed}(T_{3x}) = S_{ed}(0.212 \text{ s}) = a_g S \frac{2.5}{q} = 0.744 \cdot 1.0 \cdot \frac{2.5}{1.5} \text{ m/s}^2 = 1.24 \text{ m/s}^2, \quad (8.93)$$

$$S_{ed}(T_{4x}) = S_{ed}(0.173 \text{ s}) = a_g S \frac{2.5}{q} = 0.744 \cdot 1.0 \cdot \frac{2.5}{1.5} \text{ m/s}^2 = 1.24 \text{ m/s}^2. \quad (8.94)$$

NS-EN 1998-1 angir altså lavere pseudoakselerasjon enn NS 3491-12 for alle modene i x -retning, se ligning (8.44)-(8.47). Når pseudoakselerasjonen beregnes i henhold til NS-EN 1998-1 for dette bygget og disse grunnforholdene blir forholdet $S_{ed}(T_{jx})/S_{ed}(T_{lx})$ nøyaktig det samme som når pseudoakselerasjonen beregnes i henhold til NS 3491-12. Designspektret som er gitt i de to regelverkene, avviker altså kun fra hverandre med en konstant faktor i det egensvingeområdet vi her betrakter. Som vi senere skal se, er det ikke tilfellet når bygget står på mykere grunn.

De maksimale tilsvarende statiske lastene finnes som i avsnitt 8.3, fra ligning (3.32), (3.33), (8.9),

(8.21), (8.23) og (8.24), der pseudoakselerasjonen fra ligning (8.91) til (8.94) benyttes. Det gir

$$\mathbf{F}_{1x, maks} = \frac{L_{1x}}{M_{1x}} \mathbf{m} \phi_{1x} S_{ed}(T_{1x}) = [115 \quad 108 \quad 81 \quad 43]^T kN, \quad (8.95)$$

$$\mathbf{F}_{2x, maks} = \frac{L_{2x}}{M_{2x}} \mathbf{m} \phi_{2x} S_{ed}(T_{2x}) = [-90 \quad -4 \quad 91 \quad 94]^T kN, \quad (8.96)$$

$$\mathbf{F}_{3x, maks} = \frac{L_{3x}}{M_{3x}} \mathbf{m} \phi_{3x} S_{ed}(T_{3x}) = [43 \quad -55 \quad -26 \quad 65]^T kN, \quad (8.97)$$

$$\mathbf{F}_{4x, maks} = \frac{L_{4x}}{M_{4x}} \mathbf{m} \phi_{4x} S_{ed}(T_{4x}) = [-10 \quad 25 \quad -27 \quad 17]^T kN. \quad (8.98)$$

Nå skal vi ta stilling til hvor mange moder som skal medtas i beregningen, og hvilken kombinasjonsregel som skal benyttes når vi skal finne den maksimale skjærkraften som opptrer i hver etasje, samt det maksimale momentet om y -aksen ved terrengnivå.

NS-EN 1998-1 og NS 3491-12 foreskriver de samme reglene for hvor mange moder som skal tas med i beregningene. Som vi så i avsnitt 8.3, medfører det at vi i vårt eksempel skal ta hensyn til responsen fra de to første modene. NS-EN 1998-1 er også fullstendig samkjørt med NS 3491-12 for valg av kombinasjonsmetode, så SRSS kan benyttes.

Vi skal også her utføre to analyser av lastene i vindkryssene. Den første følger kravene i NS-EN 1998-1. Dvs. at vi kun tar hensyn til de to første modene og at vi benytter SRSS. I den andre analysen tar vi hensyn til alle modene og benytter CQC. Dermed får vi inntrykk av konsekvensene som utelatelsen av de to høyeste modene og valget av SRSS, har på resultatet.

Den maksimale skjærkraften i hver etasje fra hver mode finnes fra de tilsvarende statiske lastene i ligning (8.95) til (8.98),

$$\mathbf{V}_{1x, maks} = \begin{bmatrix} V_{41x, maks} \\ V_{31x, maks} \\ V_{21x, maks} \\ V_{11x, maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 115 \\ 115 + 108 \\ 115 + 108 + 81 \\ 115 + 108 + 81 + 43 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 115 \\ 223 \\ 304 \\ 347 \end{bmatrix} kN, \quad (8.99)$$

$$\mathbf{V}_{2x, maks} = \begin{bmatrix} V_{42x, maks} \\ V_{32x, maks} \\ V_{22x, maks} \\ V_{12x, maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90 \\ -90 - 4 \\ -90 - 4 + 91 \\ -90 - 4 + 91 + 94 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} -90 \\ -94 \\ -3 \\ 91 \end{bmatrix} kN. \quad (8.100)$$

$$\mathbf{V}_{3x, maks} = \begin{bmatrix} V_{43x, maks} \\ V_{33x, maks} \\ V_{23x, maks} \\ V_{13x, maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ 43 - 55 \\ 43 - 55 - 26 \\ 43 - 55 - 26 + 65 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 43 \\ -12 \\ -38 \\ 27 \end{bmatrix} kN. \quad (8.101)$$

$$\mathbf{V}_{4x, maks} = \begin{bmatrix} V_{44x, maks} \\ V_{34x, maks} \\ V_{24x, maks} \\ V_{14x, maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 + 25 \\ -10 + 25 - 27 \\ 10 + 25 - 27 + 17 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ -12 \\ 5 \end{bmatrix} kN. \quad (8.102)$$

Det maksimale momentet ved terrengnivå om y -aksen fra hver mode blir

$$M_{1y, maks} = (115 \cdot 12 + 108 \cdot 9 + 81 \cdot 6 + 43 \cdot 3) \text{ kNm} = 3.0 \cdot 10^3 \text{ kNm}, \quad (8.103)$$

$$M_{2y, maks} = (-90 \cdot 12 - 4 \cdot 9 + 91 \cdot 6 + 94 \cdot 3) \text{ kNm} = -0.29 \cdot 10^3 \text{ kNm}, \quad (8.104)$$

$$M_{3y, maks} = (43 \cdot 12 - 55 \cdot 9 - 26 \cdot 6 + 65 \cdot 3) \text{ kNm} = 58 \text{ kNm}, \quad (8.105)$$

$$M_{4y, maks} = (-10 \cdot 12 + 25 \cdot 9 - 27 \cdot 6 + 17 \cdot 3) \text{ kNm} = -9 \text{ kNm}. \quad (8.106)$$

Som i beregningen i henhold til NS 3491-12, kommer det også her tydelig frem av resultatene for hver mode at innflytelsen til de høyere modene er størst for skjærkraften i den øverste etasjen, liten for skjærkraften ved terrengnivå og neglisjerbar for momentet ved grunnnivå. Det er ikke overraskende at de to regelverkene er samstemte i denne saken. For det første er det korrekt teoretisk, og for det andre er forholdet $S_{ed}(T_{ix})/S_{ed}(T_{jx})$ likt i de to regelverkene.

Når vi benytter SRSS på den maksimale skjærkraften fra de to første modene får vi følgende maksimal total skjærkraft i hver etasje:

$$V_{maks, x, 2 \text{ moder}, SRSS} = \begin{bmatrix} \sqrt{V_{41x, maks}^2 + V_{42x, maks}^2} \\ \sqrt{V_{31x, maks}^2 + V_{32x, maks}^2} \\ \sqrt{V_{21x, maks}^2 + V_{22x, maks}^2} \\ \sqrt{V_{11x, maks}^2 + V_{12x, maks}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 146 \\ 242 \\ 304 \\ 359 \end{bmatrix} \text{ kN}.$$

Det maksimale momentet blir tilsvarende

$$M_{y, maks, 2 \text{ moder}, SRSS} = \sqrt{M_{1y, maks}^2 + M_{2y, maks}^2} = 3.0 \cdot 10^3 \text{ kNm}.$$

Nå beregner vi de samme lastvirkningene ved hjelp av CQC på alle fire moder. Korrelasjonskoeffisientene er gitt i ligning (8.64) og (8.65). Komplette kvadratisk kombinasjon av bidragene fra alle fire moder gir

$$V_{maks, x, 4 \text{ moder}, CQC} = \begin{bmatrix} 151 \\ 242 \\ 307 \\ 361 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (8.107)$$

Det maksimale momentet blir ved samme prosedyre

$$M_{y, maks, 4 \text{ moder}, CQC} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \rho_{ij} M_{iy, maks} M_{jy, maks}} = 3.0 \cdot 10^3 \text{ kNm}. \quad (8.108)$$

I overenstemmelse med teorien ses det at de høyere modene har størst innflytelse på skjærkraften i den øverste etasjen. Her er differansen mellom resultatene fra de to kombinasjonsmetodene 2.9 %. I den nederste etasjen er avviket til skjærkraften 0.61 %, og avviket til momentet ved terrengnivå er på bare 0.053 %. Se diskusjonen under ligning (8.21) for bakgrunnen for dette. I det videre jobber vi med resultatet fra den komplette kvadratiske kombinasjonen siden denne er den beste tilnærmelsen til lastvirkningene.

NS-EN 1998-1 tar direkte hensyn til en ting som NS 3491-12 kun implementerer i sikkerhetsfaktorer, nemlig torsjon grunnet utilsiktet eksentrisitet. Den dimensjonerende utilsiktede eksentrisiteten er for hvert dekke lik fem prosent av dekkets bredde vinkelrett på grunnakselerasjonen. Denne kan legges inn i en modal analyse ved å forskyve massen i henhold til eksentrisiteten, men den metoden er arbeidskrevende fordi det dermed må benyttes to forskjellige massematriser i hver av de to horisontale retningene. Derfor tillates det i stedet å betrakte de horisontale seismiske lastvirkningene som eksentriske. Det finnes to metoder til dette. Enten dimensjoneres konstruksjonen for torsjonsmomentet gitt av resultanten til den seismiske lastvirkningen multiplisert med den dimensjonerende utilsiktede eksentrisiteten. Eller dersom byggets masse og horisontale stivhet er symmetrisk fordelt i planet, kan det også gjøres ved å multiplisere de tilsvarende statiske lastene med en forstørrelsesfaktor δ som avhenger av plasseringen deres. For modale analyser i tre dimensjoner er

$$\delta = 1 + 0.6 \frac{x}{L_e}, \quad (8.109)$$

der

L_e er avstanden mellom de to ytterste konstruksjonsdelene som motstår sidelaster, målt vinkelrett på retningen til den aktuelle seismiske påvirkningen.

ifølge punkt 4.3.3.2.4.

For analyser basert på to plane systemer skal faktoren 0.6 i ligning (8.109) erstattes med 1.2 fordi den utilsiktede eksentrisiteten dobles. Motivasjonen for denne regelen er å ta hensyn til eventuell eksentrisitet mellom etasjenes masse- og stivhetssentre, altså eksentrisitet som er neglisjert i valget av analysemodell [15]. Vi skal altså multiplisere resultatene våre med

$$\delta = 1 + 1.2 \frac{x}{L_e}. \quad (8.110)$$

Vi benytter ligning (8.110) i vår beregning av den horisontale lasten i hvert vindkryss i x -retning siden både masse og stivhet er symmetrisk i bygget vårt.

Det er i henhold til punkt 4.3.3.2.4

lastvirkningene i de enkelte lastbærende konstruksjonsdelene, som (...) motstår sidelaster

som skal multipliseres med forstørrelsesfaktoren for utilsiktet eksentrisitet. Det vil i vårt tilfelle si horisontallastene i vindkryssene. Siden det kun er to vindkryss i x -retning blir $\delta = 1.6$ for begge. Lasten fordeles på hvert vindkryss, som i en gitt etasje tar opp halvparten av den totale skjærkraften i den etasjen. Dermed blir

$$\mathbf{H}_{vk,x} = \delta \frac{1}{2} \mathbf{V}_{maks,x,4\text{ moder},CQC} = 1.6 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 151 \\ 242 \\ 307 \\ 361 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 121 \\ 194 \\ 245 \\ 289 \end{bmatrix} kN, \quad (8.111)$$

der rad k i $\mathbf{H}_{vk,x}$ angir horisontallasten i ett vindkryss i etasje k . Bemerk hvor stor differansen er i forhold til resultatet fra NS 3491-12 som er gitt i ligning (8.68). Lastene som eurokoden gir, er gjennomsnittlig 52.2 % større enn de fra NS 3491-12 selvom pseudoakselerasjonen fra eurokoden er 5 % mindre enn den fra NS 3491-12. Det er tillegget for utilsiktet eksentrisitet som medfører at NS-EN 1998-1 gir størst tilsvarende statiske laster. Hadde det vært et vindkryss også i midten av dekket ville de tilsvarende statiske lastene på det vært mindre i henhold til NS-EN 1998-1 enn i henhold til NS 3491-12 fordi lasten på det vindkrysset ikke måtte økes for utilsiktet eksentrisitet.

Nå går vi over til lastvirkningene i y -retning. Parametrene vi fant i begynnelsen av dette avsnittet og egensvingeperiodene fra ligning (8.30) innsettes i ligning (8.89), hvilket gir

$$\begin{aligned} S_{ed}(T_{1y}) &= 0.47 \text{ m/s}^2, & S_{ed}(T_{2y}) &= 1.24 \text{ m/s}^2, \\ S_{ed}(T_{3y}) &= 1.24 \text{ m/s}^2 & \text{og} & S_{ed}(T_{4y}) = 1.24 \text{ m/s}^2. \end{aligned} \quad (8.112)$$

NS-EN 1998-1 angir altså også i y -retning lavere pseudoakselerasjon enn NS 3491-12 for alle modene, se ligning (8.69). Forholdet $S_{ed}(T_{jy})/S_{ed}(T_{ly})$ er også her nøyaktig det samme som i henhold til NS 3491-12.

De maksimale tilsvarende statiske lastene finnes fra ligning (3.32), (3.33), (8.9), (8.31), (8.32) og (8.33), der pseudoakselerasjonen fra ligning (8.112) benyttes. Det gir

$$\mathbf{F}_{1y,maks} = \frac{L_{1y}}{M_{1y}} \mathbf{m} \phi_{1y} S_{ed}(T_{1y}) = [164 \quad 153 \quad 114 \quad 61]^T \text{ kN}, \quad (8.113)$$

$$\mathbf{F}_{2y,maks} = \frac{L_{2y}}{M_{2y}} \mathbf{m} \phi_{2y} S_{ed}(T_{2y}) = [-117 \quad -5 \quad 119 \quad 123]^T \text{ kN}, \quad (8.114)$$

$$\mathbf{F}_{3y,maks} = \frac{L_{3y}}{M_{3y}} \mathbf{m} \phi_{3y} S_{ed}(T_{3y}) = [43 \quad -56 \quad -26 \quad 66]^T \text{ kN}, \quad (8.115)$$

$$\mathbf{F}_{4y,maks} = \frac{L_{4y}}{M_{4y}} \mathbf{m} \phi_{4y} S_{ed}(T_{4y}) = [-10 \quad 25 \quad -27 \quad 18]^T \text{ kN}. \quad (8.116)$$

Den maksimale skjærkraften i hver etasje fra hver mode finnes fra de tilsvarende statiske lastene i ligning (8.113) til (8.116),

$$\mathbf{V}_{1y,maks} = \begin{bmatrix} V_{41y,maks} \\ V_{31y,maks} \\ V_{21y,maks} \\ V_{11y,maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 164 \\ 164 + 153 \\ 164 + 153 + 114 \\ 164 + 153 + 114 + 61 \end{bmatrix} \text{ kN} = \begin{bmatrix} 164 \\ 317 \\ 431 \\ 493 \end{bmatrix} \text{ kN}, \quad (8.117)$$

$$\mathbf{V}_{2y,maks} = \begin{bmatrix} V_{42y,maks} \\ V_{32y,maks} \\ V_{22y,maks} \\ V_{12y,maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -117 \\ -117 - 5 \\ -117 - 5 + 119 \\ -117 - 5 + 119 + 123 \end{bmatrix} \text{ kN} = \begin{bmatrix} -117 \\ -123 \\ -4 \\ 119 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (8.118)$$

$$\mathbf{V}_{3y, maks} = \begin{bmatrix} V_{43y, maks} \\ V_{33y, maks} \\ V_{23y, maks} \\ V_{13y, maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ 43 - 56 \\ 43 - 56 - 26 \\ 43 - 56 - 26 + 66 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 43 \\ -13 \\ -38 \\ 27 \end{bmatrix} kN. \quad (8.119)$$

$$\mathbf{V}_{4y, maks} = \begin{bmatrix} V_{44y, maks} \\ V_{34y, maks} \\ V_{24y, maks} \\ V_{14y, maks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 + 25 \\ -10 + 25 - 27 \\ -10 + 25 - 27 + 18 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ -13 \\ 5 \end{bmatrix} kN. \quad (8.120)$$

Det maksimale momentet ved terrengnivå om x -aksen fra hver mode blir

$$M_{1x, maks} = (164 \cdot 12 + 153 \cdot 9 + 114 \cdot 6 + 61 \cdot 3) kNm = 4.2 \cdot 10^3 kNm, \quad (8.121)$$

$$M_{2x, maks} = (-117 \cdot 12 - 5 \cdot 9 + 119 \cdot 6 + 123 \cdot 3) kNm = -0.37 \cdot 10^3 kNm, \quad (8.122)$$

$$M_{3x, maks} = (43 \cdot 12 - 56 \cdot 9 - 26 \cdot 6 + 66 \cdot 3) kNm = 58 kNm, \quad (8.123)$$

$$M_{4x, maks} = (10 \cdot 12 + 25 \cdot 9 - 27 \cdot 6 + 18 \cdot 3) kNm = -9 kNm. \quad (8.124)$$

Ligning (8.117) til (8.124) viser nok en gang at innflytelsen til de høyere modene er størst for skjærkraften i den øverste etasjen, liten for skjærkraften ved terrengnivå og neglisjerbar for momentet ved grunnnivå. Når vi benytter SRSS på den maksimale skjærkraften fra de to første modene får vi følgende maksimal total skjærkraft i hver etasje:

$$\mathbf{V}_{maks, y, 2 \text{ moder}, SRSS} = \begin{bmatrix} 202 \\ 340 \\ 432 \\ 507 \end{bmatrix} kN. \quad (8.125)$$

Det maksimale momentet ved terreng blir

$$M_{x, maks, 2 \text{ moder}, SRSS} = 4.2 \cdot 10^3 kNm. \quad (8.126)$$

Nå beregner vi de samme lastvirkningene ved hjelp av CQC på alle fire moder. Korrelasjonskoeffisientene er gitt i ligning (8.84) og (8.85). Komplette kvadratisk kombinasjon av bidragene fra alle fire moder gir

$$\mathbf{V}_{maks, y, 4 \text{ moder}, CQC} = \begin{bmatrix} 204 \\ 340 \\ 433 \\ 509 \end{bmatrix} kN. \quad (8.127)$$

Det maksimale momentet blir tilsvarende

$$M_{x, maks, 4 \text{ moder}, CQC} = 4.2 \cdot 10^3 kNm. \quad (8.128)$$

Vi ser igjen at de høyere modene har størst innflytelse på skjærkraften i den øverste etasjen. Her er avviket mellom resultatene fra de to kombinasjonsmetodene 1.3 %. I den nederste etasjen er differansen til skjærkraften 0.56 %, og avviket til momentet ved terrengnivå er på bare 0.057 %. Se diskusjonen under ligning (8.21) for bakgrunnen for dette. I x -retning var avvikene mellom de

to kombinasjonsmetodene henholdsvis 2.9, 0.61 og 0.053 %. Grunnen til at avviket er mindre i y -retning er at den første moden er mer dominerende i y - enn i x -retning.

I det videre jobber vi med resultatet fra den komplette kvadratiske kombinasjonen siden denne høyst sannsynlig er den beste tilnærmelsen til lastvirkningene. Siden det kun er vindkryss i to akser i y -retning er $\delta = 1.6$ for alle vindkryss. Lasten fordeles på de fire vindkryssene, som i en gitt etasje hver må ta opp en fjerdepart av den totale skjærkraften i den etasjen. Dermed blir

$$\mathbf{H}_{vk,y} = \delta \frac{1}{4} \mathbf{V}_{maks,y,4moder,CQC} = \begin{bmatrix} 82 \\ 136 \\ 173 \\ 204 \end{bmatrix} kN. \quad (8.129)$$

Bemerk hvor stor differansen er i forhold til resultatet fra NS 3491-12 som er gitt i ligning (8.88). Som i x -retning, er lastene fra eurokoden gjennomsnittlig 52.5 % større enn de fra NS 3491-12 selv om pseudoakselerasjonen fra eurokoden er 5 % mindre enn den fra NS 3491-12.

8.5 Grunnforhold

De to regelverkene vi benytter i denne oppgaven, behandler innflytelsen til grunnforholdene forskjellig. Metoden i NS 3491-12 er mest direkte. Her multipliseres hele responsspektret med forstørrelsesfaktoren k_S som vanligvis er konstant, se ligning (8.37). I NS-EN 1998-1 påvirker grunnforholdene derimot også formen på designspektret siden ikke kun S men også T_B og T_C avhenger av grunnforholdene, se ligning (8.89). Begge regelverk skiller mellom en rekke grunntyper der inndelingen avhenger av den gjennomsnittlige hastigheten til en skjærbølge i de øverste 30 metrene av grunnen. Her er det av stor betydning at eurokoden skiller mellom flere grunntyper enn NS 3491-12. Det begrenser konsekvensene av å velge en konservativ grunntype dersom grunnforholdene ligger midt mellom to klasser. Grunnforholdene er aldri konstante under en konstruksjon, og derfor vil skjærbølgehastigheten varierer etter hvor på tomten grunnforholdene er målt. Det er ikke uvanlig at noen målinger tilhører en grunntype mens andre tilhører en annen. Hvis avviket mellom skjærbølgehastigheten til målingene er liten vil det være konservativt å velge den ugunstigste grunntypen, og da vil konsekvensene av dette altså ha mindre konsekvenser i eurokoden enn i NS 3491-12. I dette avsnittet undersøker vi hvor store lastvirkningene på bygget i figur 7.1 blir dersom det fra terreng er 12 meter fast grus over fjell. Dette er relativt gode grunnforhold. Årsaken til at vi ikke i stedet velger en situasjon med bløt leire er at vi i så fall må se på samvirke mellom konstruksjon og grunn. Dermed kan vi ikke anta at bygget er fullstendig fastholdt mot translasjon ved terrengnivå. Vi skal komme tilbake til slike tilfeller i kapittel 17 der vi undersøker hvordan samvirke mellom grunn og fundamenter påvirker responsen til et bygg. I dette avsnittet er vi derimot interessert i forskjellen på regelverkene, og da er det å foretrekke at endringene i forutsetninger er små i forhold til analysene vi gjennomførte i avsnitt 8.3 og 8.4.

Vi begynner med å beregne responsen i henhold til NS 3491-12. Grunnforholdene medfører at $k_S = 1.5$. Siden dette er den eneste faktoren i ligning (8.37) som ikke er lik de i avsnitt 8.3, betyr

det at responsen finnes ved å multiplisere resultatene herfra med 1.5. I x -retning gir det

$$\mathbf{V}_{maks, x, 4 \text{ moder}, CQC, NS\ 3491-12} = [237 \ 382 \ 484 \ 569]^T \text{ kN}, \quad (8.130)$$

$$M_{y, maks, 4 \text{ moder}, CQC, NS\ 3491-12} = 4.8 \cdot 10^3 \text{ kNm}, \quad (8.131)$$

$$\mathbf{H}_{vk, x, NS\ 3491-12} = [119 \ 191 \ 242 \ 285]^T \text{ kN}. \quad (8.132)$$

I y -retning fås tilsvarende

$$\mathbf{V}_{maks, y, 4 \text{ moder}, CQC, NS\ 3491-12} = [322 \ 535 \ 683 \ 802]^T \text{ kN}, \quad (8.133)$$

$$M_{x, maks, 4 \text{ moder}, CQC, NS\ 3491-12} = 6.7 \cdot 10^3 \text{ kNm}, \quad (8.134)$$

$$\mathbf{H}_{vk, y, NS\ 3491-12} = [81 \ 134 \ 171 \ 200]^T \text{ kN}. \quad (8.135)$$

INS-EN 1998-1 gir grunnforholdene $S = 1.25$, $T_B = 0.10 \text{ s}$ og $T_C = 0.30 \text{ s}$. I overensstemmelse med avsnitt 4.4 tas det dermed hensyn til at

- Løsmassene forsterker lastvirkningene
- Konstruksjoner med lengre egensvingeperiode belastes forholdsvis mer ved mykere masser

Det er gjort ved å øke S og T_C . Inngangsparametrene benyttes på samme vis som i avsnitt 8.4 til å bestemme lastvirkningene. Beregningene er vist i vedlegg A.1. Vi gjennomfører både kombinasjon av de to første modene ved SRSS og av alle fire moder ved CQC fordi vi er interessert i hvordan endringen av formen på pseudoakselerasjonsspektret påvirker innflytelsesgraden til de høyere modene.

Når vi benytter SRSS på den maksimale skjærkraften fra de to første modene, får vi følgende maksimal total skjærkraft i hver etasje:

$$\mathbf{V}_{maks, x, 2 \text{ moder}, SRSS, NS-EN\ 1998-1} = [220 \ 364 \ 456 \ 539]^T \text{ kN}. \quad (8.136)$$

Det maksimale momentet blir tilsvarende

$$M_{y, maks, 2 \text{ moder}, SRSS, NS-EN\ 1998-1} = 4.5 \cdot 10^3 \text{ kNm}. \quad (8.137)$$

Komplett kvadratisk kombinasjon av bidragene fra alle fire moder gir

$$\mathbf{V}_{maks, x, 4 \text{ moder}, CQC, NS-EN\ 1998-1} = [224 \ 364 \ 459 \ 541]^T \text{ kN}. \quad (8.138)$$

Det maksimale momentet blir tilsvarende

$$M_{y, maks, 4 \text{ moder}, CQC, NS-EN\ 1998-1} = 4.5 \cdot 10^3 \text{ kNm}. \quad (8.139)$$

De høyere modene har størst innflytelse på skjærkraften i den øverste etasjen der avviket mellom resultatene fra de to kombinasjonsmetodene er på 1.8 %. Det fremkommer ved sammenlikning av ligning (8.138) med ligning (8.136) der det også ses at differansen til skjærkraften i den nederste etasjen er på 0.49 %. Sammenliknet med avviket mellom resultatene som ble oppnådd ved direktefundamentering på fjell, se under ligning (8.108), er avviket i skjærkraften altså mindre i tilfellet med dårligere grunnforhold. Det kan forklares ved at de første modene er enda mer betydningsfulle når det akselerasjonsensitive området i designspektret er større. Dersom vi beregner forholdet mellom den dimensjonerende pseudoakselerasjonen som er gitt i ligning (A.1) til (A.4), og den i ligning (8.91) til (8.94), bekreftes denne teorien. Pseudoakselerasjonen til både den første og den andre svingeformen er en faktor 1.5 større ved grunnforholdene i dette avsnittet enn for direktefundamentering på fjell. For den tredje og fjerde egensvingeformen er faktoren derimot kun 1.25, så disse bidrar forholdsvis mindre til lastene i denne beregningen. Avviket til det maksimale momentet om y -aksen ved terrengnivå, som fremkommer ved sammenlikning av ligning (8.137) med ligning (8.139), er på 0.54 %. Det er større enn differansen mellom resultatene som ble oppnådd ved direktefundamentering på fjell. Årsaken er at kryssleddet mellom første og andre egensvingeform har blitt mer utslagsgivende i den siste beregningen fordi de begge har større innflytelse på resultatet her.

For momentet ved terrengnivå er forskjellen på resultatene fra begge regelverk tilnærmet det samme som i tilfellet der bygget var fundamentert direkte på fjell, se ligning (8.67) og (8.108) i forhold til (8.131) og (8.139). Det skyldes at de første modene, som har størst innflytelse på momentet ved terrengnivå, er økt like mye i henhold til de to regelverkene.

I det videre jobber vi med resultatet fra den komplette kvadratiske kombinasjonen siden denne generelt gir den beste tilnærmelsen til responsen. Lastvirkningene på hvert vindkryss i x -retning blir

$$\mathbf{H}_{vk, x, NS-EN 1998-1} = [179 \quad 291 \quad 367 \quad 433]^T \text{ kN}. \quad (8.140)$$

En sammenlikning av ligning (8.140) med ligning (8.132) viser at lastene som eurokoden gir, er gjennomsnittlig 51.8 % større enn de fra NS 3491-12 i motsetning til 52.2 % dersom bygget står direkte på fjell, se under ligning (8.111). Årsaken er at responsspektret generelt økes mindre i NS-EN 1998-1 enn i NS 3491-12 når det skal tas hensyn til dårligere grunnforhold.

Nå går vi over til lastvirkningene i y -retning. Vi benytter SRSS på den maksimale skjærkraften fra de to første modene, og får vi følgende maksimal total skjærkraft i hver etasje:

$$\mathbf{V}_{maks, y, 2 \text{ moder}, SRSS, NS-EN 1998-1} = [287 \quad 500 \quad 647 \quad 754]^T \text{ kN}. \quad (8.141)$$

Det maksimale momentet ved terreng blir

$$M_{x, maks, 2 \text{ moder}, SRSS, NS-EN 1998-1} = 6.3 \cdot 10^3 \text{ kNm}.$$

Komplett kvadratisk kombinasjon av bidragene fra alle fire moder gir derimot

$$\mathbf{V}_{maks, y, 4 \text{ moder}, CQC, NS-EN 1998-1} = [290 \quad 500 \quad 649 \quad 756]^T \text{ kN}, \quad (8.142)$$

og det maksimale momentet ved grunnnivå blir på samme vis

$$M_{x, maks, 4 \text{ moder}, CQC, NS-EN 1998-1} = 6.3 \cdot 10^3 \text{ kNm}. \quad (8.143)$$

Vi ser igjen at de høyere modene har fått mindre innflytelse på resultatene. For skjærkraften i den øverste etasjen gir en sammenlikning av ligning (8.141) og ligning (8.142) et avvik på 1.1 %. I den nederste etasjen er differansen til skjærkraften 0.26 %, og avviket til momentet ved terrengnivå er på bare 0.024 %. Til sammenlikning er avviket mellom resultatene fra de to kombinasjonsmetodene henholdsvis 1.3, 0.56 og 0.057 % for skjærkraften i den øverste og nederste etasjen samt momentet om x -aksen ved terreng når bygget fundamenteres direkte på fjell og responsen beregnes etter samme regelverk, se diskusjonen under ligning (8.128). Grunnen til at avviket mellom de to kombinasjonsmetodene er mindre for alle responsene vi her har undersøkt, er at den første moden er mer betydningsfull i dette tilfellet. Det bekreftes ved en sammenlikning av pseudoakselerasjonene i ligning (A.14) til (A.17) med de i ligning (8.112). Pseudoakselerasjonen for den første moden er 1.5 ganger større i tilfellet med løsmasser enn der det fundamenteres direkte på fjell. For de andre tre modene er pseudoakselerasjonen kun 1.25 ganger større i tilfellet med løsmasser. Altså er innflytelsen til den første moden større når det er løsmasser mellom terreng og fjell.

Momentet fra NS-EN 1998-1, som er gitt i ligning (8.143), er mindre enn det fra NS 3491-12 i ligning (8.134). Forskjellen er på litt over 5 %, hvilket tilsvarer forskjellen i designspektrene for fundamentering direkte på fjell. Ligning (8.67) og (8.108) viser at avviket er nøyaktig 5 % mellom de to regelverkene når det fundamenteres direkte på fjell. Forskjellen er kun litt større i tilfellet med løsmasser fordi momentet nesten utelukkende avhenger av den første moden. NS 3491-12 øker generelt lastene sine mer i tilfellet med løsmasser enn det eurokoden gjør, men de to regelverkene øker lastene like mye for den første moden, og derfor blir forskjellen ikke større.

Igen fortsetter vi med resultatet fra den komplette kvadratiske kombinasjonen. Lastvirkningen i hvert vindkryss i y -retning blir

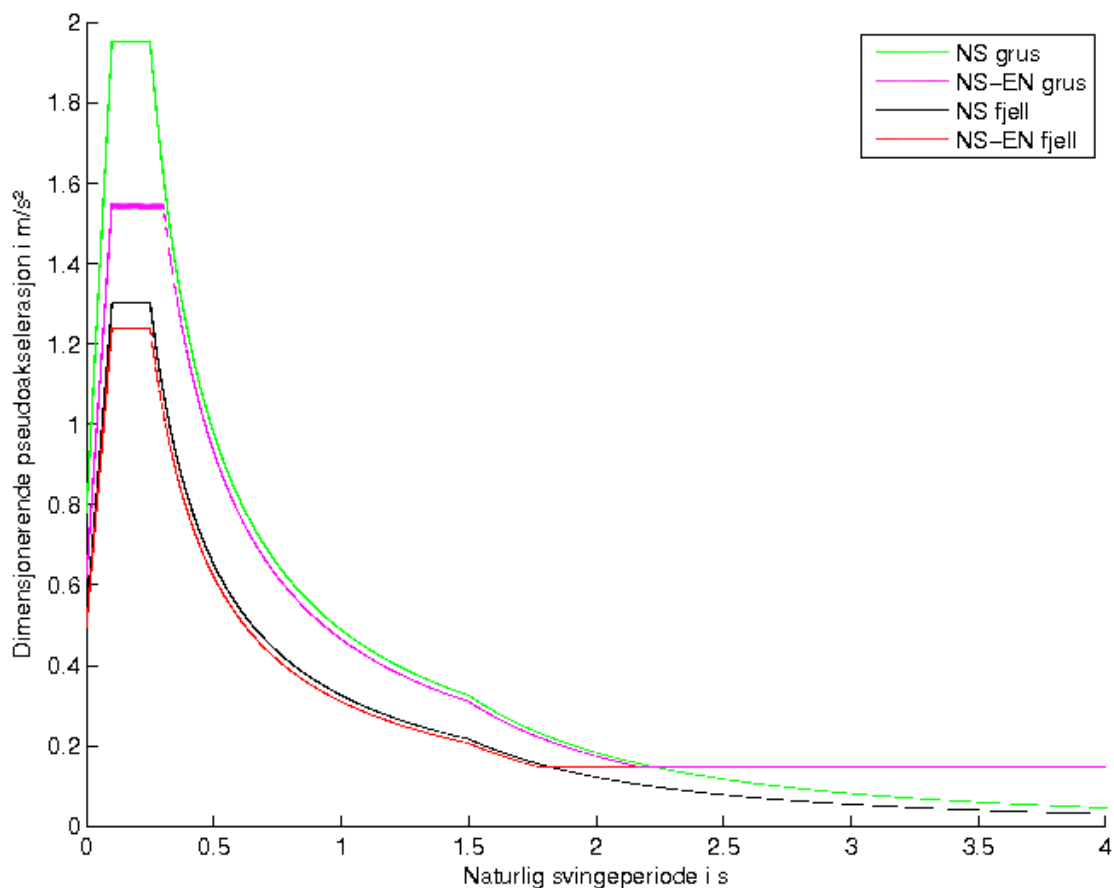
$$\mathbf{H}_{vk,y,NS-EN\ 1998-1} = [116 \quad 200 \quad 260 \quad 302]^T \text{ kN}. \quad (8.144)$$

En sammenlikning av ligning (8.144) med ligning (8.135) viser at lastene i henhold til eurokoden er gjennomsnittlig 49.0 % større enn de fra NS 3491-12 i motsetning til 52.5 % dersom bygget står direkte på fjell, se under ligning (8.129). Årsaken er at responsspektret generelt økes mindre i NS-EN 1998-1 enn i NS 3491-12 når det skal tas hensyn til dårligere grunnforhold. For lastene i x -retning er forskjellen mellom regelverkene derimot 51.8 %, se under ligning (8.140). Bygget er stivere i y - enn i x -retning, og i dette tilfellet gir det bedre overensstemmelse mellom de dimensjonerende lastene som foreskrives i NS 3491-12 og NS-EN 1998-1.

8.6 Sammenlikning og diskusjon

Vi har sammenliknet og diskutert resultatene våre underveis i dette kapitlet. Nå oppsummeres de viktigste konklusjonene og argumentene for disse. Vi har gjennomført fire beregninger i henhold til hvert regelverk, en for hver hovedretning og hver type grunnforhold. Disse er alle interessante fordi stivheten til bygget er nesten dobbelt så stor i y - som i x -retning, og grunnforholdene som kjent har innflytelse på resultatene.

Den viktigste konklusjonen er at NS-EN 1998-1 konsekvent foreskriver mindre totale lastvirkninger enn NS 3491-12, men at tillegget for utilsiktet eksentrisitet, som er stort fordi analysen er basert på todimensjonale modeller, øker den dimensjonerende horisontale lasten i vindkryssene i henhold til NS-EN 1998-1 voldsomt. En 3D-analyse vil altså minske, men ikke fjerne, forkjellen. Avviket mellom lastene som foreskrives av de to regelverkene, er mindre for vindkryssene og større for de totale lastvirkningene når det er 12 meter grus mellom terreng og fjell, enn når det er fjell i dagen. Årsaken er at responsspektret generelt økes mindre i NS-EN 1998-1 enn i NS 3491-12 når det skal tas hensyn til dårligere grunnforhold. Figur 8.9 viser de fire designspektrene som er benyttet i dette kapitlet.



Figur 8.9: Designspektrene for bygget i figur 7.1. Det ses at pseudoakselerasjonen foreskrevet av eurokoden er mindre enn den som NS 3491-12 angir. Likevel skal vindkryssene dimensjoneres for større laster dersom bygget prosjekteres i henhold til NS-EN 1998-1 enn hvis NS 3491-12 benyttes

Egensvingeformene er vist i figur 8.4 og 8.6. I begge figurene ses det at egensvingeform k har $k - 1$ punkter som kun roteres, selvom de ikke er fastholdt mot translasjon av opplagerbetingelser. Det er alltid tilfellet for systemer hvis innflytelsesvektor kun består av ettall [8]. Det medfører at høyere modener har relativt liten innflytelse på den totale skjærkraften ved grunnnivå, men forholdsvis stor innflytelse på lastvirkninger i de øverste etasjene. Det resulterer også i at de høyere modene har liten innflytelse på momentet ved grunnnivå hvilket vi har sett i resultatene våre. Konklusjonen

fra samtlige beregninger er også at de høyere modene har størst innflytelse på skjærkraften i den øverste etasjen. Det ses for eksempel ved sammenlikning av resultatene i ligning (8.62) og (8.66) samt (8.63) og (8.67).

I dette kapitlet har vi mange ganger sett at den første egensvingeformen i begge retninger er dominerende, den andre gir et lite bidrag og de to siste er neglisjerbare. Det kommer for eksempel frem i de effektive modale massene i ligning (8.27) og (8.35) samt den konsekvent neglisjerbare forskjellen mellom resultatene som oppnås ved bruk av SRSS på de to første egensvingeformene og CQC på alle fire. Det kommer også frem ved beregningen av den maksimale responsen fra hver mode, for eksempel i ligning (8.54) til (8.61). Det største avviket mellom de to metodene er på under 5 %, hvilket må betraktes som neglisjerbart. Det er dermed ikke i tilfellene som vi i dette kapitlet har undersøkt, nødvendig å bruke den ekstra tiden det tar å kombinere alle modene ved CQC.

Koeffisientene i stivhetsmatrisen for deformasjon i y -retning er ca. dobbelt så store som koeffisientene i x -retning. I overensstemmelse med våre teoretiske konklusjoner i kapittel 3 medfører det at egensvingeperiodene i y -retning er kortere enn de tilsvarende i x -retning, og at de geometriske effektene har minst innflytelse på den dynamiske likevektsligningen i y -retning.

Den totale skjærkraften ved grunnivå er større i y - enn i x -retning. Det ses for eksempel i ligning (8.66) og (8.86), og skyldes at fordelingen av de effektive modale massene samt de naturlige svingeformene til modene er tilnærmet like i de to retningene, egensvingeperiodene er kortere i y -retning og de utslagsgivende modene tilhører det hastighetsensitive området i designspektret. Det medfører at horisontallasten i hvert vindkryss i y -retning er i samme størrelsesorden som horisontallasten på hvert kryss i x -retning, se for eksempel ligning (8.68) og (8.88), selvom lasten i y -retning deles over dobbelt så mange vindkryss som den i x -retning.

Ved sammenlikning av for eksempel ligning (8.70) til (8.73) med ligning (8.48) til (8.51) ser vi at særlig den første moden i y -retning gir større respons enn den første moden i x -retning. De tilsvarende statiske lastene fra de høyere modene er derimot tilnærmet like. Årsaken er at bygget er stivest i y -retning og den første moden i begge retninger tilhører det forskyvningsensitive området. Det medfører at pseudoakselerasjonen til den første moden i y -retning er større enn den er for den første moden i x -retning. Derfor er den første moden mer dominerende i y - enn i x -retning, og dermed blir konsekvensene ved å neglisere de høyere modene mindre. Der betyr at avviket mellom resultatene fra de to kombinasjonsmetodene generelt er større i x -retning enn i y -retning.

Kryssleddene i den komplette kvadratiske kombinasjonen har liten innflytelse på resultatene våre fordi de viktigste modene har svært forskjellige egensvingeperioder. Et unntak er det maksimale momentet om y -aksen ved terrengnivå i tilfellet med dårligere grunnforhold i henhold til eurokoden. Her er avviket mellom resultatene fra SRSS og CQC større enn ved direktefundamentering på fjell, og årsaken er kryssleddet mellom første og andre mode. Det er mer utslagsgivende i tilfellet med dårligere grunnforhold fordi de to første svingeformene begge har stor innflytelse på resultatet i dette tilfellet. Ellers er den generelle tendensen for eurokoden at avviket mellom resultatene fra SRSS og CQC som ble oppnådd ved direktefundamentering på fjell, er større enn det som fremkommer i tilfellet med dårligere grunnforhold. Grunnen til forskjellen er at de første modene er enda mer betydningsfulle i situasjonen med løsmasser fordi det akselerasjonsensitive området i

designspektret er bredere. For NS 3491-12 er avvikene de samme siden hele responsspektret her multipliseres med en faktor som tar hensyn til grunnforholdene.

Det fremkommer av designspektret i NS 3491-12, som er gitt i ligning (8.38), at regelverket neglisjerer at dempningens innflytelse på den relative forskyvningen er svært liten for systemer med lange egensvingeperioder. Dessuten har begge regelverkene gjort den forenklingen å la pseudoakselerasjonen øke proporsjonalt med T for helt korte egensvingeperioder i stedet for å la den være konstant. Bortsett fra det stemmer designspektrene med konklusjonene våre i kapittel 5.

Vi avslutter med å gjenta den viktigste konklusjonen fra dette kapitlet, nemlig at tillegget for utilsiktet torsjon i NS-EN 1998-1 medfører at eurokoden foreskriver større laster i vindkryssene enn NS 3491-12. Tilfellet er motsatt for lastene i søylene som ikke støtter vindkryss, fordi disse ikke tar opp torsjon, men de skal uansett dimensjoneres for egen- og nyttelast i bruddgrensetilstand så her er lastvirkninger fra jordskjelv sjelden dimensjonerende.

Kapittel 9

Analyse av generaliserte en-frihetsgradsystemer

9.1 Innledning

I dette kapitlet sammenliknes de dimensjonerende lastene som fremkommer ved bruk av generaliserte en-frihetsgradsystemer i henhold til NS 3491-12 og NS-EN 1998-1. Det gjør vi ved å beregne skjærkreftene i hver etasje, momentene ved terreng og den horisontale kraften i vindkryssene for bygget som er vist i figur 7.1. Begge regelverkene tillater flere metoder for bestemmelse av både egensvingeperioden til det generaliserte en-frihetsgradsystemet og fordelingen av lastene, og vi skal benytte to av disse. Den første er basert på resultatene våre for den første moden i hver hovedretning i avsnitt 8.2. Den andre er en mer forenklet metode.

Avsnitt 9.2 begynner med en kort introduksjon av kravene som stilles i NS 3491-12 for at analysemetoden som bygger på teorien for generaliserte en-frihetsgradsystemer kan benyttes. Deretter beregnes lastene som bygget vårt skal dimensjoneres for dersom den første moden i hver hovedretning benyttes som generalisert svingeform. I avsnitt 9.3 benyttes i stedet en forenklet metode gitt i NS 3491-12 til å bestemme den dominerende egensvingeperioden og -formen i hver hovedretning. Metoden sammenliknes med teorigrunnlaget fra kapittel 3, og de tilnærmede egensvingeperiodene og -formene benyttes til å beregne de tilsvarende statiske lastene i vindkryssene. Avsnitt 9.4 og 9.5 er bygd opp på samme vis som avsnitt 9.2 og 9.3, men omhandler NS-EN 1998-1 og ikke NS 3491-12.

I avsnitt 9.6 diskuteres resultatene. Her sammenliknes de med resultatene fra kapittel 8 som i denne sammenhengen betraktes som en bedre tilnærming til de “virkelige” lastene en tidshistorieanalyse med uendelig mange frihetsgrader ville resultert i. Ordet “virkelige” er satt i anførselstegn fordi responsspektret er et designspekter basert på flere tidligere jordskjelv.

Som i kapittel 8 ser vi bort fra sjaktens innflytelse på lastvirkningene fordi disse er små.

9.2 NS 3491-12 - Svingeform fra modal analyse

Av de fire analysemetodene som er gitt i NS 3491-12, er *system med en frihetsgrad* den minst arbeidskrevende. Den er likevel lite brukt i praksis fordi det i punkt C.2.1 stilles krav om at

...byggverket ikke i vesentlig grad påvirkes av høyere svingeformer (og) stivhet og masse er fordelt slik at det i liten grad oppstår vridning (torsjon).

Det er opp til den prosjekterende å vurdere om en gitt konstruksjon tilfredsstiller kravene siden de ikke er gitt mer spesifikt. Bygget vi betrakter oppfyller kravet om at det oppstår lite vridning fordi det er dobbeltsymmetrisk. Samtidig tilsvarer den effektive modale massen til den første egensvingeformen nesten 90 % av byggets totale masse i begge hovedretninger, så de høyere svingeformene har liten innvirkning på resultatene. Derfor er det legitimt å benytte analysemetoden *system med en frihetsgrad*. I dette avsnittet beregnes skjærkraften i hver etasje, momentene ved terreng samt den horisontale belastningen i vindkryssene ut ifra reglene i NS 3491-12 og naturlige svingeformer og -perioder fra avsnitt 8.2.

Vi begynner med å beregne lastvirkningene i x -retning. Den totale skjærkraften ved terrengnivå fra den dominerende egensvingeformen er i NS 3491-12 gitt helt tilsvarende det teoretiske uttrykket i ligning (5.3), men med den modale massen erstattet av den totale fordi et generalisert en-frihetsgradsystem nettopp er antatt svingende kun i denne ene formen.

$$V_{b,maks} = m_{tot} S_d(T_1) \quad (9.1)$$

Den totale massen er gitt i ligning (8.26), og den dimensjonerende pseudoakselerasjonen i ligning (8.44). Som nevnt i avsnitt 8.3, kreves det ikke påvisning av kapasitet i henhold til NS 3491-12 for konstruksjoner med dimensjonerende pseudoakselerasjon på mindre enn $0.5 m/s^2$. Vi gjennomfører likevel beregningen av lastene for å kunne sammenlikne dem med resultatene fra modal analyse. Ved innsetting i ligning (9.1) fås

$$V_{b,x,maks} = 1.17 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 0.35 \text{ m/s}^2 = 407 \text{ kN}. \quad (9.2)$$

Fordelingen av de tilsvarende statiske lastene mellom etasjene er gitt som

$$F_k = V_{b,maks} \frac{\phi_k m_k}{\sum_{j=1}^n \phi_j m_j}, \quad (9.3)$$

der n er antallet etasjer. Ligning (9.3) bygger på uttrykket i ligning (3.32) som gjentas her:

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^m s_k S_d(T_k),$$

der m er antallet moder som medtas i analysen. Det vises ved først å sette inn uttrykket for s_k fra ligning (3.33):

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^m \frac{L_k}{M_k} \mathbf{m} \phi_k S_d(T_k).$$

Nå multipliserer vi med maksimalverdien til ligning (3.39) i teller og nevner,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_{k=1}^m \frac{V_{b,maks,k} L_k}{V_{b,maks,k} M_k} \mathbf{m} \phi_k S_d(T_k) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{V_{b,maks,k} L_k}{m_k S_d(T_k) M_k} \mathbf{m} \phi_k S_d(T_k) \\ &= \sum_{k=1}^m V_{b,maks,k} \frac{L_k}{m_k M_k} \mathbf{m} \phi_k. \end{aligned}$$

Uttrykket for den effektive modale massen i ligning (3.37) settes inn,

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^m V_{b,maks,k} \frac{L_k \mathbf{m} \phi_k}{\boldsymbol{\iota}^T \mathbf{s}_k M_k} = \sum_{k=1}^m V_{b,maks,k} \frac{L_k \mathbf{m} \phi_k}{\boldsymbol{\iota}^T \frac{L_k}{M_k} \mathbf{m} \phi_k M_k} = \sum_{k=1}^m V_{b,maks,k} \frac{\mathbf{m} \phi_k}{\boldsymbol{\iota}^T \mathbf{m} \phi_k}. \quad (9.4)$$

Innflytelsesvektoren $\boldsymbol{\iota}$ er gitt i ligning (8.22), og massematrisen i ligning (8.9). Siden

- innflytelsesvektoren kun består av ettall for bygg som tilfredsstiller kravene til bruk av generaliserte en-frihetsgradsystemer
- massematrisen er diagonal for alle bygg der massen antas samlet i diskrete punkter

velger vi å omskrive nevneren i ligning (9.4) til en endelig sum,

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^m V_{b,maks,k} \frac{\mathbf{m} \phi_k}{\boldsymbol{\iota}^T \mathbf{m} \phi_k} = \sum_{k=1}^m V_{b,maks,k} \frac{\mathbf{m} \phi_k}{\sum_{j=1}^n m_j \phi_{j,k}}.$$

Lastvirkningen i x -retning på dekket over etasje k blir dermed

$$F_{k,x} = \sum_{l=1}^n V_{b,x,maks,l} \frac{\phi_{l,k} m_l}{\sum_{j=1}^n \phi_{j,l} m_j}.$$

Den teoretiske lastfordelingen som fremkommer her, og den i NS 3491-12, som er gitt i ligning (9.3), er altså eksakt like når det kun tas hensyn til en enkelt svingform, noe som er en grunnleggende tilnærming for generaliserte en-frihetsgradsystemer.

Vi setter inn skjærkraften ved terrengnivå fra ligning (9.2), egensvingeformen fra ligning (8.21) og massene fra massematrisen i (8.9) i ligning (9.3). Det gir

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{x, maks} &= V_{b, x, maks} \frac{\phi_{1x}^T \mathbf{m}}{\sum_{j=1}^n \phi_{j1x} m_j} \\
 &= \frac{407 \text{ kN}}{1.00 \cdot 281 + (0.89 + 0.66 + 0.36) \cdot 296} \begin{bmatrix} 1.00 \cdot 281 \\ 0.89 \cdot 296 \\ 0.66 \cdot 296 \\ 0.36 \cdot 296 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \\
 &= \begin{bmatrix} 135 \\ 126 \\ 95 \\ 51 \end{bmatrix} \text{ kN}.
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Skjærkraften i hver etasje blir dermed

$$\mathbf{V}_{x, maks} = \begin{bmatrix} 135 \\ 135 + 126 \\ 135 + 126 + 95 \\ 135 + 126 + 95 + 51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 135 \\ 261 \\ 356 \\ 406 \end{bmatrix} \text{ kN}. \tag{9.6}$$

Herfra finnes den horisontale kraften som må tas opp i hvert vindkryss. Siden det er to vindkryss i x -retning blir det halvparten av den totale skjærkraften i den aktuelle etasjen, så

$$\mathbf{H}_{vk, x} = \frac{1}{2} \mathbf{V}_{x, maks} = \begin{bmatrix} 68 \\ 131 \\ 178 \\ 203 \end{bmatrix} \text{ kN}. \tag{9.7}$$

Momentet om y -aksen ved terrengnivå blir

$$M_{y, maks} = (135 \cdot 12 + 126 \cdot 9 + 95 \cdot 6 + 51 \cdot 3) \text{ kNm} = 3.5 \cdot 10^3 \text{ kNm}. \tag{9.8}$$

Det er kun skjærkraften i den øverste etasjen som er underestimert i forhold til resultatene som fremkommer ved fullstendig kvadratisk kombinasjon i ligning (8.66) og (8.67). I den øverste etasjen er avviket til skjærkraften, og dermed også til horisontallasten i vindkryssene, 15 %, og det er som nevnt ikke en konservativ feil. For skjærkraften ved terrengnivå er avviket 7 %, og for momentet om y -aksen ved fundamentnivå er det 11 %. Avvikene må altså konkluderes å være store men hovedsaklig konservative. Det er naturlig at avviket er størst for skjærkraften i den øverste etasjen siden det er den av de beregnede responsene som avhenger mest av de høyere modene.

Nå gjennomfører vi den samme analysen i y -retning. Skjærkraften ved terrengnivå fra den dominerende egensvingeformen beregnes ved innsetting av konstruksjonens totale masse fra ligning (8.26) og den dimensjonerende pseudoakselerasjonen fra ligning (8.69) i ligning (9.1). Det gir

$$V_{b, y, maks} = 1.17 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 0.49 \text{ m/s}^2 = 578 \text{ kN}. \tag{9.9}$$

Fordelingen av de tilsvarende statiske lastene mellom etasjene finnes ved at vi setter følgende inn i ligning (9.3): skjærkraften ved terrengnivå fra ligning (9.9), den første egensvingeformen fra ligning (8.31) og massene fra massematrisen i ligning (8.9). Det gir

$$\mathbf{F}_{y, maks} = V_{b,y, maks} \frac{\phi_{1y}^T \mathbf{m}}{\sum_{j=1}^n \phi_{j1y} m_j} = \begin{bmatrix} 192 \\ 179 \\ 134 \\ 72 \end{bmatrix} kN.$$

Skjærkraften i hver etasje blir dermed

$$\mathbf{V}_{y, maks} = \begin{bmatrix} 192 \\ 372 \\ 506 \\ 578 \end{bmatrix} kN. \quad (9.10)$$

Herfra finnes den horisontale kraften som må tas opp i hvert vindkryss. Siden det er fire vindkryss i y -retning må hvert av de ta opp en fjerdepart av den totale skjærkraften i den aktuelle etasjen, så

$$\mathbf{H}_{vk,y} = \frac{1}{4} \mathbf{V}_{y, maks} = \begin{bmatrix} 48 \\ 93 \\ 126 \\ 144 \end{bmatrix} kN. \quad (9.11)$$

Momentet om x -aksen ved terrengnivå blir

$$M_{x, maks} = 4.9 \cdot 10^3 kNm. \quad (9.12)$$

Akkurat som i x -retning, er det kun skjærkraften i den øverste etasjen som er undervurdert i forhold til resultatene som fremkommer ved fullstendig kvadratisk kombinasjon i ligning (8.86) og (8.87). I den øverste etasjen er avviket til skjærkraften (og dermed også horisontallasten i vindkryssene) 10 %, og det er som nevnt ikke en konservativ feil. For skjærkraften ved terrengnivå er avviket 8 %, og for momentet om y -aksen ved fundamentnivå er det 11 %. Avvikene er altså litt mer konservative enn det som var tilfellet i x -retning. Det skyldes at den første svingeformen er mer dominerende i y - enn i x -retning fordi lengden på egensvingeperioden medfører at den dimensjonerende pseudoakselerasjonen er størst i y -retning.

For begge hovedretningene er avvikene mellom resultatene som oppnås ved denne analysen i forhold til resultatene ved modal analyse, konservative for alt annet enn kreftene i den øverste etasjen der avviket er forholdsvis stort. Det skyldes at nettopp den responsen i stor grad avhenger av de høyere modene, se diskusjonen ved figur 8.4. Avvikene til momentene er også stort, 11 % i begge hovedretninger. I en modal analyse påvirkes momentet nesten kun av den første moden, så avviket bunner ikke i at det ikke tas hensyn til de høyere modene. Det skyldes derimot at den effektive modale massen er erstattet av byggets totale masse i ligning (9.1). Herav kan vi konkludere at lastfordelingen er for konservativ med tanke på momentet ved terreng men samtidig ikke konservativ nok med tanke på horisontallastene i den øverste etasjen. Dette er et paradoks siden de to responsene henger sammen.

9.3 NS 3491-12 - forenklet antatt svingeform

NS 3491-12 angir to tilnærmede metoder for bestemmelse av den første egensvingeperioden uten løsning av egenverdi-problemet i ligning (3.21). Den enkleste er empirisk og generelt svært konservativ [15]. Den er basert på målinger i forbindelse med jordskjelv i California og angir den første egensvingeperioden i sekunder uavhengig av hovedretning som

$$T_1 = C H^{3/4}. \quad (9.13)$$

Konstanten C avhenger av avstivningssystemet og H er konstruksjonens høyde i meter. Ligningen er gyldig for $H < 40 \text{ m}$ som er oppfylt i vårt eksempel. For bygg med stålrammer er $C = 0.085$. Det gir

$$T_1 = C H^{3/4} = 0.085 \cdot (4 \cdot 3)^{3/4} = 0.55 \text{ s}.$$

Sammenliknet med resultatet i ligning (8.20) og (8.30) ses det at denne metoden vil gi feilaktige resultater siden pseudoakselerasjonen (og dermed de tilsvarende statiske lastene) er svært avhengig av lengden på egensvingeperioden. Vi vil derfor ikke benytte dette resultatet i det videre, men derimot konsentrere oss om den andre forenklete metoden for bestemmelse av den dominerende svingeperioden. Denne skiller mellom horisontalretningene, og er gitt som

$$T_1 = 2\sqrt{u_n}, \quad (9.14)$$

der u_n er definert i punkt C.2.2 som

...den horisontale forskyvningen i meter av byggverkets øverste etasje som følge av gravitasjonskreftene påsatt som horisontale laster.

Uttrykket kan forsvares fra ligning (3.15) som gjentas her,

$$\omega_1^2 = g \frac{\sum_{k=1}^n m_k u_k}{\sum_{k=1}^n m_k u_k^2}.$$

Dersom konstruksjonen kun har en frihetsgrad, kan det forenkles til

$$\omega_1^2 = g \frac{m_n u_n}{m_n u_n^2} = \frac{g}{u_n}.$$

Dermed blir den første egensvingeperioden

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi\sqrt{u_n}}{\sqrt{g}} = 2\sqrt{u_n} \frac{\pi}{\sqrt{9.81 \text{ m/s}^2}} \approx 2\sqrt{u_n}.$$

Metoden er altså basert på forenklingen at all masse er samlet ved den øverste frihetsgraden. Det vil gi en for lav naturlig vinkelfrekvens fordi akselerasjonen i bygget øker oppover i etasjene når det svinger i sin første mode og innflytelsesvektoren kun består av ettall [8].

Vi begynner med å beregne lastvirkningene i x -retning. Analysen som gir u_n er statisk, hvilket betyr at

$$\bar{k}_x u_x = P_x, \quad (9.15)$$

der P_x er lastvektoren gitt som

$$P_x = m \iota g. \quad (9.16)$$

Innsetting fra ligning (8.9), (8.19), (8.22) og (9.16) i ligning (9.15) gir

$$\begin{aligned} u_x &= \bar{k}_x^{-1} m \iota g \\ &= \begin{bmatrix} 112 & -112 & 0 & 0 \\ -112 & 222 & -111 & 0 \\ 0 & -111 & 220 & -109 \\ 0 & 0 & -109 & 216 \end{bmatrix}^{-1} \cdot 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 281 \\ 296 \\ 296 \\ 296 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot 9.81 \, m \\ &= \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.24 \\ 0.19 \\ 0.11 \end{bmatrix} m. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Det betyr at byggets første naturlige svingeperiode i x -retning i henhold til den tilnærmede metoden i NS 3491-12 er

$$T_{1x} = 2\sqrt{u_{4x}} \frac{s}{\sqrt{m}} = 2\sqrt{0.26} \, s = 1.0 \, s \quad (9.18)$$

Sammenliknet med resultatet i ligning (8.20) er T_{1x} som forventet for lang. Det skyldes at ligning (9.14) ikke til fulde tar hensyn til at massen er fordelt over konstruksjonen. Som nevnt tidligere, er en lang egensvingeperiode gunstig når den tilsvarende statiske belastningen skal beregnes for en konstruksjon som tilhører det hastighet- eller forskyvningsensitive området i responsspektret. De fleste bygg tilhører nettopp det hastighetsensitive området, og det er derfor underlig at NS 3491-12 ikke benytter ligning (3.15) i sin helhet. I avsnitt 3.4 ble vi kjent med at den alltid gir tilnærmede egensvingeperioder som er litt kortere enn de eksakte, og dermed også litt for stor pseudoakselerasjon i størsteparten av responsspektret.

Nå går vi over til å bestemme lastene ut fra den beregnede egensvingeperioden. Dermed trenger vi den dimensjonerende pseudoakselerasjonen som er gitt i ligning (8.37). Med $\xi = 0.05$, som gir $\eta = 1.0$, blir den normaliserte pseudoakselerasjonen for konstruksjonens dominerende egensvingeperiode i x -retning ifølge ligning (8.38)

$$S_e(T_{1x}) = 0.61. \quad (9.19)$$

Ligning (9.19) gir sammen med verdiene av k_Q , k_S , γ_1 , a_g og $k_{f,spiss}$, som vi fant i avsnitt 8.3, den dimensjonerende pseudoakselerasjonen.

$$S_d(T_{1x}) = 0.7 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 0.93 \, m/s^2 \cdot 0.61 \cdot 0.8 = 0.32 \, m/s^2. \quad (9.20)$$

Resultatet i ligning (9.20) er som forventet mindre enn $S_d(T_{1x})$ i den modale analysen, se ligning (8.44). Som i avsnitt 9.2 gjennomfører vi beregningen av lastene for å kunne sammenlikne dem med resultatene i de tidligere avsnittene selvom konstruksjoner med dimensjonerende pseudoakselerasjon på mindre enn $0.5 \, m/s^2$ ikke må kontrolleres i henhold til NS 3491-12.

Den totale skjærkraften ved terrengnivå fra den dominerende egensvingeformen finnes ved innsetting i ligning (9.1), der den totale massen er gitt i ligning (8.26) og den dimensjonerende pseudoakselerasjonen i ligning (9.20). Det gir

$$V_{b,x,max} = m_{tot} S_d(T_{1x}) = 372 \, kN. \quad (9.21)$$

Fordelingen av de tilsvarende statiske lastene, som er gitt i ligning (9.3), forutsetter at den dominerende egensvingeformen er kjent. Det er den ikke ved fremgangsmåten vi benytter i dette avsnittet. Formen som fremkommer i ligning (9.17), er en bra tilnærming, men for å følge NS 3491-12 slavisk benytter vi i stedet dennes forenklete metode for bestemmelse av den første naturlige svingeformen. Den ser slik ut:

$$\psi_k = z_k^p, \quad (9.22)$$

der z_k er høyden fra terreng til dekke k og p er en parameter med verdiene $p = 1$ for $T_1 \leq 0.5 s$ og $p = 2$ for $T_1 \geq 2.5 s$. For $0.5 s \leq T_1 \leq 2.5 s$ interpoleres det for p . Intensjonen med variasjonen i p er å ta hensyn til to ting [8]. For det første er den dominerende egensvingeformen kun lineær for svært stive systemer. For det andre har den andre moden generelt større innflytelse på resultatet når den første egensvingeperioden er lang fordi pseudoakelerasjonen reduseres kraftig med egensvingeperioden i det hastighet- og forskyvningsensitive området. Formen på den andre moden er generelt preget av større omslag i de øverste etasjene, og det beskrives bedre med en parabel enn en linje. En parabelformet lastvirkning gir større skjærkraft ved alle andre nivåer enn terreng, noe som er typisk for systemer med større bidrag fra høyere moder.

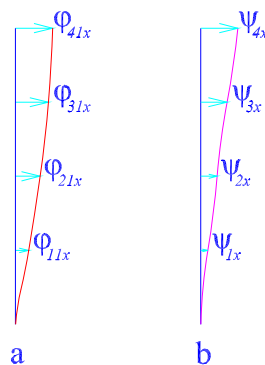
I ligning (9.18) er den tilnærmede egensvingeperioden i x -retning gitt som $T_{1x} = 1.0 s$. Det medfører at

$$p_x = 1.2. \quad (9.23)$$

Vi beregner den generaliserte svingeformen i x -retning ved å sette inn ligning (9.23) i ligning (9.22). For å kunne sammenlikne denne med den første naturlige svingeformen som er gitt i ligning (8.21), skalerer vi resultatet fra (9.22) slik at $\psi_{4x} = 1$.

$$\psi_x = \begin{bmatrix} \psi_{4x} \\ \psi_{3x} \\ \psi_{2x} \\ \psi_{1x} \end{bmatrix} = z_4^{-p_x} \begin{bmatrix} z_4^{p_x} \\ z_3^{p_x} \\ z_2^{p_x} \\ z_1^{p_x} \end{bmatrix} = 12^{-1.2} \begin{bmatrix} 12^{1.2} \\ 9^{1.2} \\ 6^{1.2} \\ 3^{1.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.71 \\ 0.43 \\ 0.19 \end{bmatrix}. \quad (9.24)$$

Figur 9.1 viser den teoretiske, dominerende egensvingeformen fra ligning (8.21) og den generaliserte svingeformen i ligning (9.24). Det ses at NS 3491-12 gir en konservativ lastfordeling fordi utslagene er forholdsvis mindre for de lavere etasjene.



Figur 9.1: Den dominerende svingeformen i x -retning. Del *a* viser resultatet fra den modale analysen i ligning (8.21), del *b* resultatet fra den forenklete metoden i ligning (9.24)

For å beregne lastvirkningene på hver etasje innsetter vi ligning (8.9), (9.21) og (9.24) i ligning (9.3). Det gir

$$\mathbf{F}_{x, maks} = V_{b, x, maks} \frac{\mathbf{m} \psi_x}{\iota^T \mathbf{m} \psi_x} = \begin{bmatrix} 155 \\ 115 \\ 71 \\ 31 \end{bmatrix} kN.$$

Skjærkraften i hver etasje blir dermed

$$\mathbf{V}_{x, maks} = \begin{bmatrix} 155 \\ 271 \\ 341 \\ 372 \end{bmatrix} kN. \quad (9.25)$$

Herfra finnes den dimensjonerende horisontale kraften som skal tas opp i hvert vindkryss i x -retning,

$$\mathbf{H}_{vk, x} = \frac{1}{2} \mathbf{V}_{x, maks} = \begin{bmatrix} 78 \\ 135 \\ 171 \\ 186 \end{bmatrix} kN. \quad (9.26)$$

Momentet om y -aksen ved terrengnivå blir

$$M_{y, maks} = 3.4 \cdot 10^3 kNm. \quad (9.27)$$

Sammenliknet med resultatene som fremkommer ved fullstendig kvadratisk kombinasjon i ligning (8.66) og (8.67), er skjærkraften i både øverste og nederste etasje for liten, mens den i likhet med momentet om y -aksen ved terreng er overestimert i andre og tredje etasje. I både den øverste og nederste etasjen er avviket til skjærkraften, og dermed også til horisontallasten i vindkryssene, bare 2 %, men det er som nevnt ikke en konservativ feil. For momentet om y -aksen ved fundamentnivå er avviket 9 %. Avvikene er altså mindre enn de vi fikk i avsnitt 9.2.

Nå går vi over til lastvirkningene i y -retning. Vi følger den samme prosedyren som i x -retning, men hvert steg forklares ikke like utførlig. Først beregnes forskyvningene ved horisontal belastning av vekten i hver etasje ut fra ligning (8.9) og (8.29) som innsettes i (9.15) og (9.16) omskrevet for y -retning,

$$\mathbf{u}_y = \bar{\mathbf{k}}_y^{-1} \mathbf{m} \mathbf{g} \iota = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.12 \\ 0.09 \\ 0.05 \end{bmatrix} m.$$

Ligning (9.14) gir tilnærmingen til den første egensvingeperioden i y -retning,

$$T_{1y} = 2\sqrt{u_{4y}} \frac{s}{\sqrt{m}} = 2\sqrt{0.13} s = 0.72 s. \quad (9.28)$$

Akkurat som i x -retning, fremkommer T_{1y} som lengre enn resultatet vi fikk ved modal analyse, se ligning (8.30). Som vi diskuterte ved ligning (9.18), er det vanligvis ikke konservativt.

Innsatt i uttrykket for den normaliserte pseudoakselerasjonen med $\xi = 0.05$ gir $T_{1y} = 0.72$ s

$$S_e(T_{1y}) = 0.87. \quad (9.29)$$

Den normaliserte pseudoakselerasjonen er som forventet større i y - enn i x -retning fordi konstruksjonen er stivest i y -retning. Innsetting i uttrykket for den dimensjonerende pseudoakselerasjonen, ligning (8.37), gir

$$S_d(T_{1y}) = 0.45 \text{ m/s}^2.$$

For konstruksjoner med dimensjonerende pseudoakselerasjon på mindre enn 0.5 m/s^2 kreves det ikke påvisning av kapasitet i henhold til NS 3491-12. Vi velger igjen å gjennomføre beregningen av lastene for å kunne sammenlikne dem med resultatene i de foregående avsnitt.

Den totale skjærkraften ved terrengnivå fra den dominerende egensvingeformen beregnes som i ligning (9.21),

$$V_{b,y,max} = m_{tot} S_d(T_{1y}) = 1.17 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 0.45 \text{ m/s}^2 = 527 \text{ kN}. \quad (9.30)$$

Skjærkraften ved grunnivå er altså større i y - enn i x -retning, se ligning (9.21). Dette fordi den dominerende egensvingeperioden er lengre i y -retning enn i x -retning og konstruksjonen tilhører det hastighetsensitive området av responspektret.

Fordelingen av de tilsvarende statiske lastene mellom etasjene følger uttrykket i ligning (9.3). Svingeformen beregnes fra ligning (9.22), der p bestemmes ut fra $T_{1y} = 0.72$ s fra (9.28),

$$p_y = 1.1.$$

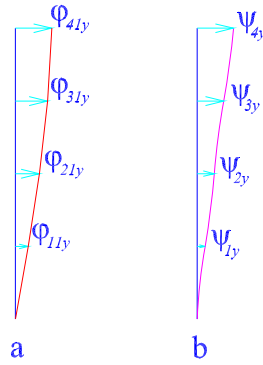
For å kunne sammenlikne svingeformen i y -retning i henhold til ligning (9.22) med det teoretiske resultatet i (8.31) skalerer vi resultatet fra (9.22) slik at $\psi_{4y} = 1$.

$$\psi_y = \begin{bmatrix} \psi_{4y} \\ \psi_{3y} \\ \psi_{2y} \\ \psi_{1y} \end{bmatrix} = z_4^{-p_y} \begin{bmatrix} z_4^{p_y} \\ z_3^{p_y} \\ z_2^{p_y} \\ z_1^{p_y} \end{bmatrix} = 12^{-1.1} \begin{bmatrix} 12^{1.1} \\ 9^{1.1} \\ 6^{1.1} \\ 3^{1.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.73 \\ 0.47 \\ 0.22 \end{bmatrix}. \quad (9.31)$$

Figur 9.2 viser den dominerende egensvingeformen fra ligning (8.31) og den generaliserte svingeformen som fremkommer i ligning (9.31). Som i x -retning, se figur 9.1, ses det at NS 3491-12 gir en konservativ lastfordeling. Sammenliknet med situasjonen i x -retning er avviket mellom de to egensvingeformene likevel mindre markant fordi konstruksjonen er stivest i y -retning, se diskusjonen ved ligning (9.22).

Kombinasjonen av ligning (8.9), (9.3), (9.30) og (9.31) gir

$$\mathbf{F}_{y,max} = V_{b,y,max} \frac{\mathbf{m} \psi_y}{\iota^T \mathbf{m} \psi_y} = \begin{bmatrix} 211 \\ 163 \\ 105 \\ 49 \end{bmatrix} \text{ kN}.$$



Figur 9.2: Den dominerende egensvingeformen i y -retning. Del a viser resultatet fra den modale analysen i ligning (8.31), del b resultatet fra den forenklede metoden i ligning (9.31)

Skjærkraften i hver etasje blir dermed

$$\mathbf{V}_{y, maks} = \begin{bmatrix} 212 \\ 374 \\ 478 \\ 527 \end{bmatrix} kN. \quad (9.32)$$

Siden det er fire vindkryss i y -retning må hvert vindkryss i en gitt etasje ta opp en fjerdepart av kreftene i den etasjen, så

$$\mathbf{H}_{vk, y} = \frac{1}{4} \mathbf{V}_{y, maks} = \begin{bmatrix} 53 \\ 93 \\ 120 \\ 132 \end{bmatrix} kN, \quad (9.33)$$

Momentet om x -aksen ved terrengnivå blir

$$M_{y, maks} = 4.8 \cdot 10^3 kNm. \quad (9.34)$$

Skjærkraften i den øverste og nederste etasjen som fremkommer ved denne analysen, er mindre enn de vi fant ved modal analyse, se ligning (8.86). Slik var det også i x -retning, Skjærkraften i andre og tredje etasje samt momentet om x -aksen ved terreng er derimot anslått konservativt. Avviket til skjærkraften i øverste etasje, og dermed også til horisontallasten i vindkrysset i samme etasje, i ligning (9.32) i forhold til den i ligning (8.86) er på 2 %, akkurat som i x -retning. I den nederste etasjen er avviket på 1 %. Ingen av disse avvikene er konservative, men de er til gjengjeld ekstremt små. Avviket mellom momentet som er gitt i (9.34), og det i (8.87) er på 7 %, og det er konservativt. Avvikene mellom resultatene fra den modale analysen med fire frihetsgrader og de fra beregningene basert på et generalisert en-frihetsgradsystem er altså også i y -retning mindre når den tilnærmede naturlige svingeperioden og svingeformen fra den forenklede metoden i NS-3491-12 benyttes enn når den første moden fra den modale analysen legges til grunn. I de følgende avsnitt skal vi se om det også er slik i NS-EN 1998-1.

Det har i dette avsnittet vist seg at analyse basert på generaliserte en-frihetsgradsystemer egner seg best for systemer som ikke er for fleksible. Begrunnelsen er at pseudoakselerasjonen til den første moden er så liten for svært fleksible systemer at de høyere modene derfor får større innflytelse på resultatet.

9.4 NS-EN 1998-1 - Svingeform fra modal analyse

I NS-EN 1998-1 stilles det mye strengere krav til en konstruksjon for at den skal kunne betraktes som et generalisert en-frihetsgradsystem. For det første skal den tilfredsstillende spesifikk krav til regularitet i plan og oppriss, og for det andre får den første egensvingeperioden ikke være lengre enn $4T_C$ og 2 sekunder. Kravene til regularitet i plan skyldes at det vil oppstå torsjon hvis masse og stivhet ikke er jevnt fordelt i etasjene, noe vi kommer tilbake til i kapittel 16. Kravene til regularitet i oppriss skyldes at byggverk med svært varierende stivhet oppover i etasjene lokalt kan være svært avhengig av høyere moder [15]. Det skal vi se nærmere på i kapittel 15. Kravet til begrenset egensvingeperiode skyldes at pseudoakselerasjonen er ekstremt liten for systemer med lang naturlig svingeperiode. Dermed blir responsen fra den første moden liten selv om den tilhørende effektive modale massen er stor. De høyere modene har vanligvis mindre effektiv modal masse, men de vil ha vesentlig større pseudoakselerasjon og derfor relativt stor innflytelse på responsen.

Vi skal ikke gå grundigere inn på de spesifikke kravene, men benytte oss av at de er tilfredsstillende for bygget i figur 7.1, og gjennomføre beregningene ut fra generaliserte en-frihetsgradsystemer i hver retning, eller *Analyse ved hjelp av tverrkraftmetoden* som det kalles i NS-EN 1998-1. I dette avsnittet benyttes den første moden fra avsnitt 8.2 som svingeform, og vi begynner med analysen i x -retning. Egensvingeperioden og formen til denne er gitt i henholdsvis ligning (8.20) og (8.21).

I NS-EN 1998-1 er den totale skjærkraften ved terrengnivå gitt som

$$V_{b, maks} = m_{tot} S_d(T_1) \lambda. \quad (9.35)$$

Korreksjonsfaktoren λ er lik 0.85 for $T \leq 2T_C$ for bygg med mer enn to etasjer. I alle andre tilfeller er $\lambda = 1.0$. Tanken bak λ er at den effektive modale massen til den første moden ikke er lik den totale massen til konstruksjonen [42]. I bygninger med mer enn en etasje er det kun den første naturlige svingeformen hvis tilsvarende statiske laster alle virker i samme retning. De øvrige svingeformene vil ha punkter som forblir i ro, og dermed motsatt rettede utslag for forskjellige etasjer, se figur 8.4. Derfor vil den totale skjærkraften ved grunnnivå hovedsaklig avhenge av den første moden, og det er dennes effektive modale masse som skal benyttes i beregningen. For konstruksjoner med $T \geq 2T_C$ er innflytelsen fra de høyere modene så stor at λ settes lik en for å ta hensyn til lastvirkningene fra disse [15]. Siden eurokoden generelt foreskriver mindre dimensjonerende pseudoakselerasjon enn NS 3491-12, se figur 8.9, vil innflytelsen til λ medføre at den totale skjærkraften ved terreng ifølge NS-EN 1998-1 er mindre enn eller lik den i NS 3491-12, se ligning (9.21).

Ifølge ligning (8.20) er den dominerende egensvingeperioden i x -retning lik 0.936 s, hvilket er

mer enn $2T_C = 2 \cdot 0.25 \text{ s} = 0.5 \text{ s}$. Derfor er $\lambda = 1.0$. Innsatt i ligning (9.35) gir det

$$V_{b,x,maks} = m_{tot} S_d(T_{1x}). \quad (9.36)$$

Dette uttrykket er eksakt likt det i NS 3491-12, se ligning (9.1). Den totale massen er gitt i ligning (8.26) og den dimensjonerende pseudoakselerasjonen i (8.91). For konstruksjoner med dimensjonerende pseudoakselerasjon på mindre enn 0.49 m/s^2 kreves det ikke påvisning av kapasitet i henhold til NS-EN 1998-1. Vi gjennomfører likevel beregningen av lastene for å kunne sammenlikne dem med resultatene i tidligere avsnitt. Innsatt i ligning (9.36) gir ligning (8.26) og (8.91)

$$V_{b,x,maks} = 1.17 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 0.33 \text{ m/s}^2 = 388 \text{ kN}. \quad (9.37)$$

Fordelingen av de tilsvarende statiske lastene følger det samme prinsippet som i NS 3491-12, se ligning (9.3). Vi setter inn skjærkraften ved terrengnivå fra ligning (9.37), egensvingeformen fra ligning (8.21) og massene fra massematrisen i (8.9). Det gir

$$\mathbf{F}_{x,maks} = V_{b,x,maks} \frac{\boldsymbol{\phi}_{1x}^T \mathbf{m}}{\sum_{j=1}^n \phi_{j1x} m_j} = \begin{bmatrix} 129 \\ 120 \\ 90 \\ 48 \end{bmatrix}. \quad (9.38)$$

Skjærkraften i hver etasje blir dermed

$$\mathbf{V}_{x,maks} = \begin{bmatrix} 129 \\ 249 \\ 339 \\ 388 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (9.39)$$

Momentet om y -aksen ved terrengnivå blir

$$M_{y,maks} = 3.2 \cdot 10^3 \text{ kNm}. \quad (9.40)$$

Den horisontale kraften som må tas opp i hvert vindkryss, finnes fra skjærkreftene i ligning (9.39). Forstørrelsesfaktoren for utilsiktet eksentrisitet er gitt i avsnitt 8.4 som $\delta = 1.6$. Siden det er to vindkryss i x -retning må hvert av de ta opp halvparten av den totale skjærkraften i den aktuelle etasjen, så

$$\mathbf{H}_{vk,x} = \delta \frac{1}{2} \mathbf{V}_{x,maks} = \begin{bmatrix} 103 \\ 199 \\ 271 \\ 310 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (9.41)$$

Nøyaktig som for NS 3491-12, er det kun skjærkraften i den øverste etasjen som er underestimert i forhold til resultatene som fremkommer ved fullstendig kvadratisk kombinasjon i ligning (8.107) og (8.108). Avvikene er nøyaktig de samme som for NS 3491-12, altså 15 % for skjærkraften i den øverste etasjen, og dermed også for horisontallasten i vindkryssene i den etasjen, 7 % for skjærkraften ved terrengnivå og 11 % for momentet om y -aksen ved fundamentnivå. Grunnen til dette ligger i følgende faktorer:

- Egensvingeformene og -periodene som er lagt til grunn for beregningene, er like for de to regelverkene, både i den modale analysen og i beregningene med generalisert svingeform
- Avviket mellom designspektrene for de to regelverkene er på 5 % for alle egensvingeperiodene til systemene. Som vi så i avsnitt 8.5, hadde situasjonen vært en annen hvis bygget ikke var fundamentert direkte på fjell
- Uttrykket for den totale skjærkraften ved terreng er likt i de to regelverkene. Det hadde ikke vært tilfelle dersom egensvingeperioden hadde vært kortere enn $2T_C = 2 \cdot 0.25 \text{ s} = 0.5 \text{ s}$, se ligning (9.35)
- De tilsvarende statiske lastene fordeles på samme vis mellom etasjene, se ligning (9.3)

Nå går vi over til å beregne lastvirkningene i y -retning. Egensvingeperioden er gitt i ligning (8.30) som $T_{1y} = 0.659 \text{ s}$, hvilket er mer enn $2T_C = 2 \cdot 0.25 \text{ s} = 0.5 \text{ s}$. Derfor er $\lambda = 1.0$. Sammen med ligning (8.26) og ligning (8.112) innsettes det i ligning (9.35). Resultatet er

$$V_{b,y,max} = m_{tot} S_d(T_{1y}) = 550 \text{ kN}. \quad (9.42)$$

Vi setter inn skjærkraften ved terrengnivå fra ligning (9.42), egensvingeformen fra ligning (8.31) og massene fra massematrisen i (8.9) i ligning (9.3). Det gir

$$\mathbf{F}_{y,max} = V_{b,y} \frac{\phi_{1y}^T \mathbf{m}}{\sum_{j=1}^n \phi_{j1y} m_j} = \begin{bmatrix} 183 \\ 171 \\ 128 \\ 68 \end{bmatrix}. \quad (9.43)$$

Skjærkraften i hver etasje blir dermed

$$\mathbf{V}_{y,max} = \begin{bmatrix} 183 \\ 354 \\ 482 \\ 550 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (9.44)$$

Momentet om y -aksen ved terrengnivå blir

$$M_{x,max} = 4.7 \cdot 10^3 \text{ kNm}. \quad (9.45)$$

Den horisontale kraften som må tas opp i hvert vindkryss, finnes fra skjærkraftene i ligning (9.44). Forstørrelsesfaktoren for utilsiktet eksentrisitet er som før lik 1.6, og siden det er fire vindkryss i y -retning må hvert av disse ta opp en fjerdepart av den totale skjærkraften i den aktuelle etasjen. Dermed blir

$$\mathbf{H}_{vk,y} = \delta \frac{1}{4} \mathbf{V}_{y,max} = \begin{bmatrix} 73 \\ 142 \\ 193 \\ 220 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (9.46)$$

Avvikene blir igjen tilsvarende de for NS 3491-12, dvs. at skjærkraften (og dermed også horisontallasten i vindkryssene) i den øverste etasjen er 10 % for lite i forhold til resultatet i ligning (8.127), skjærkraften ved terrengnivå er 8 % for stort og momentet om y -aksen ved terreng er 11 % for stort, se ligning (8.128). Årsaken til at avvikene er de samme som for NS 3491-12, er gitt under ligning (9.41).

9.5 NS-EN 1998-1 - Forenklet antatt svingeform

I dette avsnittet undersøker vi hvordan den forenklede metoden i NS-EN 1998-1 stemmer overens med den modale analysen vi gjennomførte i avsnitt 8.4. Først skal konstruksjonens dominerende egensvingeperiode bestemmes ved en av de tilnærmede metodene i NS-EN 1998-1. Disse er helt tilsvarende de i NS 3491-12, dvs. at den naturlige svingeperioden enten finnes ved hjelp av den empiriske formelen i ligning (9.13) eller det mer korrekte uttrykket i ligning (9.14). Dermed blir sammenlikningen vår av resultatene fra NS 3491-12 med de som oppnås i dette kapitlet i praksis en sammenlikning av responsspektrene og lastfordelingsprinsippene i regelverkene.

Designspektret for pseudoakselerasjonen er gitt i ligning (8.89). Bortsett fra egensvingeperioden er alle parametrene gitt i avsnitt 8.4. Ved å benytte den dominerende egensvingeperioden i x -retning som vi fant i ligning (9.18), kommer vi frem til den dimensjonerende pseudoakselerasjonen i x -retning,

$$S_d(T_{1x}) = 0.30 m/s^2. \quad (9.47)$$

Bemerk at T_{1x} kun akkurat er liten nok til at metoden er gyldig, siden $4T_C = 1.0 s$. Derfor kan vi forvente relativt store avvik i denne analysen i forhold til avvikene for den samme analysen i y -retning der egensvingeperioden er kortere.

Skjærkraften ved terreng finnes ved å sette inn ligning (8.26) og (9.47) i uttrykket for skjærkraften i ligning (9.35) med $\lambda = 1.0$,

$$V_{b,x,max} = m_{tot} S_d(T_{1x}) \lambda = 354 kN. \quad (9.48)$$

Når lasten fordeles over etasjene kan ligning (9.3) benyttes, der den første egensvingeformen kan antas lineært økende fra fundament til tak,

$$\psi_k = z_k. \quad (9.49)$$

NS-EN 1998-1 tar altså ikke hensyn til at den dominerende egensvingeformen kun er lineær for ekstremt stive systemer, og at den andre moden generelt har større innflytelse på resultatet når den første egensvingeperioden er lang, slik parameteren p sørger for i NS 3491-12, se ligning (9.22). Til gjengjeld er den naturlige svingeperioden begrenset ved kravet om at $T < 4T_C$ og $T < 2s$.

Innsetting av ligning (8.9), (9.48) og (9.49) i ligning (9.3) gir

$$F_{x,max} = V_{b,x,max} \frac{m \psi}{\iota^T m \psi} = \begin{bmatrix} 137 \\ 108 \\ 72 \\ 36 \end{bmatrix} kN. \quad (9.50)$$

Skjærkraften i hver etasje blir dermed

$$V_{x,max} = \begin{bmatrix} 137 \\ 246 \\ 318 \\ 354 \end{bmatrix} kN. \quad (9.51)$$

Momentet om y -aksen ved terrengnivå blir

$$M_{y, maks} = 3.2 \cdot 10^3 \text{ kNm}. \quad (9.52)$$

Den horisontale kraften som må tas opp i hvert vindkryss, finnes fra skjærkreftene i ligning (9.51). Konstruksjonen vi betrakter har to vindkryss som begge har samme avstand til dekkets massesenter. Dermed gir ligning (8.110) $\delta = 1.6$, og resultatet blir

$$\mathbf{H}_{vk,x} = \delta \frac{1}{2} \mathbf{V}_{x, maks} = \begin{bmatrix} 110 \\ 197 \\ 254 \\ 283 \end{bmatrix} \text{ kN}, \quad (9.53)$$

Når vi sammenlikner resultatet i ligning (9.53) med det fra den fullstendige kvadratiske kombinasjonen i ligning (8.111), ser vi at analysen basert på en lineær generalisert svingeform gir for lave skjærkrefter og dermed også horisontale laster i vindkryssene i den øverste og nederste etasjen, mens skjærkreftene i andre og tredje etasje blir for store. Avviket er på 9 % i den øverste etasjen, men bare 2 % for skjærkraften i den nederste etasjen. Momentet blir for stort ved analysen i dette avsnittet, det ser vi fra ligning (8.108) og (9.52). Avviket er på 6 % og det er konservativt. Differansen er mindre når den generaliserte svingeformen antas lineær og den tilhørende naturlige svingeperioden finnes ved en tilnærmet metode enn når den første moden benyttes. Da var avvikene på henholdsvis 15, 7 og 11 %, se under ligning (9.41).

Sammenliknet med resultatet fra NS 3491-12 i ligning (9.26), er lastene i henhold til eurokoden i ligning (9.53) gjennomsnittlig nesten 50 % større. Dette trass i at de beregnede egensvingeperiodene er eksakt like for de to regelverkene og eurokoden ga lavere pseudoakselerasjon enn NS 3491-12. Forskjellen mellom resultatene for de to regelverkene reduseres med høyden over terreng. Det skyldes parameteren p i ligning (9.22) som gjør den generaliserte svingeformen i NS 3491-12 mer konservativ enn den lineære svingeformen som benyttes i NS-EN 1998-1.

Nå går vi over til lastvirkningen i y -retning. Vi setter inn den dominerende egensvingeperioden, som vi fant i ligning (9.28), i ligning (8.89). Dermed kommer vi frem til den dimensjonerende pseudoakselerasjonen i y -retning,

$$S_d(T_{1y}) = 0.43 \text{ m/s}^2. \quad (9.54)$$

Egensvingeperioden til bygget vårt er lik 0.72 s , hvilket er mer enn $2T_C = 2 \cdot 0.25 \text{ s} = 0.5 \text{ s}$. Derfor er $\lambda = 1.0$ i ligning (9.35). Sammen med ligning (8.26) og (9.54) gir det

$$V_{b,y, maks} = 502 \text{ kN}. \quad (9.55)$$

Lastene fordeles over etasjene i henhold til ligning (9.3), der den generaliserte svingeformen er lineært økende fra fundament til tak. Innsetting av ligning (8.9), (9.49) og (9.55) gir

$$\mathbf{F}_{y, maks} = V_{b,y, maks} \frac{\mathbf{m} \boldsymbol{\psi}}{\boldsymbol{\iota}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} 195 \\ 154 \\ 103 \\ 51 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (9.56)$$

Skjærkraften i hver etasje blir dermed

$$\mathbf{V}_{y, maks} = \begin{bmatrix} 195 \\ 348 \\ 451 \\ 502 \end{bmatrix} kN. \quad (9.57)$$

Momentet om x -aksen ved terrengnivå blir

$$M_{x, maks} = 4.5 \cdot 10^3 kNm. \quad (9.58)$$

Lastene i ligning (9.57) skal fordeles på vindkryssene i hver etasje og forstørres på grunn av utilsiktet eksentrisitet. Konstruksjonen vi betrakter har fire vindkryss i y -retning som alle har samme avstand til dekkets massesenter. Dermed gir ligning (8.110) $\delta = 1.6$ som sammen med ligning (9.57) medfører at

$$\mathbf{H}_{vk, y} = \delta \frac{1}{4} \mathbf{V}_{y, maks} = \begin{bmatrix} 78 \\ 139 \\ 180 \\ 201 \end{bmatrix} kN, \quad (9.59)$$

Når vi sammenlikner resultatet i ligning (9.59) med det fra den fullstendige kvadratiske kombinasjonen i ligning (8.129) ser vi at analysen ved hjelp en lineær generalisert svingeform gir for lave horisontale lastvirkninger i vindkryssene i den øverste og nederste etasjen, mens kreftene i andre og tredje etasje blir for store. Avviket er på 5 % i den øverste etasjen, men bare 1 % for skjærkraften i den nederste etasjen. Momentet blir for stort ved analysen i dette avsnittet, det ses ved sammenlikning av ligning (9.58) og (8.128). Avviket er på 6 %, og det er konservativt. I x -retning er de samme avvikene 9, 2 og 6 %. Som forventet er den tilnærmede metoden altså litt bedre i y -enn i x -retning fordi bygget er stivest i y -retning.

Som i x -retning er forskjellen mellom resultatene fra den modale analysen i avsnitt 8.4 og de vi har funnet ved generaliserte frihetsgrader mindre når den generaliserte svingeformen antas lineær og den tilhørende naturlige svingeperioden finnes ved en tilnærmet metode enn når den første moden benyttes.

Den lineære svingeformen som eurokoden legger til grunn, medfører at metoden er litt enklere her enn i NS 3491-12. Forenklingen i NS-EN 1998-1 kan forsvares ved at det i dette regelverket til gjengjeld stilles større krav til en konstruksjon for at den skal kunne behandles som et generalisert en-frihetsgradsystem. Spesielt kravet om at den naturlige svingeperioden skal være kortere enn $4T_C$ og $2s$ er viktig i denne sammenheng fordi kortere egensvingeperiode generelt hører til systemer med en mer lineær svingeform.

Sammenliknet med resultatet fra NS 3491-12 i ligning (9.33) er lastene på vindkryssene i henhold til NS-EN 1998-1 gjennomsnittlig 50 % større. Dette trass i at de beregnede egensvingeperiodene er eksakt like for de to regelverkene og at eurokoden ga lavere pseudoakselerasjon enn NS 3491-12. Forskjellen mellom resultatene for de to regelverkene reduseres med høyden over terreng, og den er litt større i y -enn i x -retning. Det skyldes parametren p i ligning (9.22) som gjør den antatte svingeformen i NS 3491-12 mer konservativ enn den lineære som benyttes i eurokoden. Egensvingeperioden i y -retning er kortere enn i x -retning, og derfor har p større innflytelse i x -retning.

9.6 Sammenlikning og diskusjon

Underveis i dette kapitlet har vi gjort en del iakttagelser i form av sammenlikninger og diskusjoner. I dette avsnittet oppsummerer vi resultatenes forskjelle og likheter, både innbyrdes men hovedsaklig i forhold til resultatene fra de modale analysene i avsnitt 8.3 og 8.4. Tabell 9.1 viser de sistnevnte avvikene samt gjennomsnittet av tallverdien til avvikene for hver analyse. Tallene i tabellen fungerer som bakgrunn for teksten i dette avsnittet.

Tabell 9.1: Avvikene mellom resultatene fra dette kapitlet og de fra kapittel 8. Avvikene er angitt i prosent, og negativ verdi betyr at metoden i dette kapitlet gir for liten respons

Respons	NS 3491-12		NS-EN 1998-1	
	første mode	forenklet	første mode	forenklet
$V_{maks,4x}$ og $H_{vk,4x}$	-15	-2	-15	-9
$V_{maks,1x}$ og $H_{vk,1x}$	7	-2	7	-2
$M_{y,maks}$	11	9	11	6
$V_{maks,4y}$ og $H_{vk,4y}$	-10	-2	-10	-5
$V_{maks,1y}$ og $H_{vk,1y}$	8	-1	8	-1
$M_{x,maks}$	11	7	11	6
Gjennomsnittlig numerisk avvik	10	4	10	5

En viktig forskjell på de to regelverkene er at eurokoden stiller mange spesifikke krav til en konstruksjon for at den kan betraktes som et generalisert en-frihetsgradsystem. På den andre siden stiller NS 3491-12 kun krav som er så lite spesifikke, at det er opp til den prosjekterende å vurdere om metoden kan benyttes.

Når den første moden i hver retning fra avsnitt 8.2 legges til grunn for analysen, er prosedyren i regelverkene lik bortsett fra at NS-EN 1998-1 forstørker lasten i vindkryssene for utilsiktet eksentrisitet. Forskjellen i resultatene for skjærkraft i etasjene og moment ved terreng bunner kun i forskjellen på designspektrene. Derfor er disse resultatene 5 % større i henhold til NS 3491-12 enn ifølge eurokoden. Det kommer for eksempel frem ved sammenlikning av ligning (9.2) og (9.37), (9.6) og (9.39) eller (9.8) og (9.40). Siden NS-EN 1998-1 tar hensyn til utilsiktet eksentrisitet ved å multiplisere de nominelle horisontale lastene i vindkryssene med $\delta = 1.6$, blir disse $1.6 - 1.05 = 1.52$ ganger større enn det som foreskrives i NS 3491-12. Det fremkommer av ligning (9.7) og (9.41) samt (9.11) i forhold til (9.46). Det at prosedyren i de to regelverkene er lik medfører også at avvikene mellom resultatene som oppnås ved denne metoden i forhold til resultatene fra modal analyse, er de samme for de to tilfellene. For begge hovedretningene er disse avvikene konservative for alt annet enn skjærkraften i den øverste etasjen der avviket i x -retning er på 15 % mens avviket i y -retning er på 10 %. I begge hovedretningene er det altså et stort avvik for horisontallastene i den øverste etasjen. Det skyldes at nettopp den responsen i stor grad avhenger av de høyere modene, se diskusjonen ved figur 8.4. Avvikene til momentene er også stort, 11 % i begge hovedretninger. Det skyldes at lasten fordeles annerledes i metoden med generalisert en-frihetsgradsystem enn i den modale analysen. Herav kan vi konkludere at lastfordelingen er for konservativ med tanke på momentet ved terreng, men samtidig ikke konservativ nok med tan-

ke på horisontallastene i den øverste etasjen. Dette er et paradoks siden de to responsene henger sammen.

Når den generaliserte svingeformen med tilhørende naturlig svingeperiode i stedet bestemmes ved hjelp av forenklete metoder avviker resultatene fra de to regelverkene ikke lengre med en konstant faktor. Siden metoden for bestemmelse av den dominerende egensvingeperioden er den samme i de to regelverkene, er det ikke den som gir variasjonene. Det er derimot den generaliserte svingeformen. Eurokoden antar at svingeformen er lineær, mens NS 3491-12 legger mer arbeid i den. Forenklingen i NS-EN 1998-1 kan forsvares ved at det i dette regelverket til gjengjeld stilles større krav til en konstruksjon for at den skal kunne behandles som et generalisert en-frihetsgradsystem, deriblant en øvre grense for egensvingeperioden. Når vi sammenlikner avviket mellom resultatene i disse analysene med de tilsvarende resultatene fra modal analyse ser vi to tendenser. For det første medfører den lineære svingeformen at avvikene er større for skjærkreftene i både øverste og nederste etasje i begge hovedretninger. For det andre er avviket til momentet mindre for momentene i henhold til NS-EN 1998-1 enn NS 3491-12. Avviket til skjærkraften er, i motsetning til det for momentet, ikke konservativt. Derfor er det ekstra arbeidet som NS 3491-12 krever ikke bortkastet. Eurokoden tillater i punkt 4.3.3.2.2(2) bruk av

... uttrykk basert på metoder for dynamisk analyse av konstruksjoner...

når den generaliserte svingeformen skal bestemmes. Derfor anbefales det på bakgrunn av resultatene i dette kapitlet å benytte svingeformen som NS 3491-12 gir frem for den lineære som er nevnt eksplisitt i NS-EN 1998-1.

Den siste viktige konklusjonen fra dette kapitlet er at beregningene med forenklet svingeform og -periode gir mindre avvik til resultatene fra den modale analysen enn det gir å benytte den første moden. Differansen er generelt mindre i y - enn i x -retning, hvilket er forståelig siden de høyere modene har større innflytelse på resultatene når den første svingeperioden er svært lang. Metoden med generalisert svingeform egner seg derfor best for bygg som ikke er for fleksible, og det er ikke noen gevinst i å beregne den første moden i hovedretningene.

Kapittel 10

Modale 2D-analyser fra dataprogram

10.1 Innledning

I dette kapitlet skal vi se på resultatene som oppnås når de seismiske lastvirkningene beregnes ved todimensjonale analyser i programmet Ansys. Det gjennomføres både analyser i henhold til NS 3491-12 og NS-EN 1998-1. De viktigste forskjellene mellom analysene i dette kapitlet og de i kapittel 8 er antallet frihetsgrader og geometriske effekter. Da vi gjennomførte beregningene for hånd var vi nødt til å holde antallet frihetsgrader til et absolutt minimum. Når vi benytter dataprogrammer er dette ikke lenger nødvendig. Vi kan derfor innføre flere frihetsgrader i hver etasje og dermed ta hensyn til at dekkene vil bevege seg både horisontalt og vertikalt. Det taler for større nøyaktighet til resultatene, men de geometriske effektene virker mot dette. I Ansys tas det ikke hensyn til plastiske effekter når den geometriske stivhetsmatrisen beregnes, dvs. at μ settes lik 1.0 i ligning (8.17).

Siden modellene våre fortsatt er todimensjonale velger vi også her å neglisere sjaktens innvirkning på lastvirkningene. Resultatene vi skal trekke frem er skjærkraften i hver etasje og horisontal-lasten i vindkryssene ved terrengnivå. Vi undersøker ikke momentet ved terrengnivå siden det ikke er direkte knyttet til dimensjonerende spenninger i konstruksjonen. Vi tok dette med i de tidligere avsnittene for vurderingen av de høyere modenenes innvirkning på ulike lastvirkninger. Dette aspektet betraktes som ferdig belyst.

Avsnitt 10.2 inneholder lastvirkningene på konstruksjonen i figur 7.1 i henhold til NS 3491-12. Avsnitt 10.3 er basert på den samme analysen, men gir resultater i henhold til NS-EN 1998-1. Kapitlet avsluttes med sammenlikning og diskusjon av resultatene i avsnitt 10.4.

10.2 Ansys og NS 3491-12

I dette avsnittet beregnes responsen til konstruksjonen i figur 7.1 i henhold til NS 3491-12. Analysen avviker fra den i avsnitt 8.3 på det punktet at den inneholder flere frihetsgrader. Antallet moder er lik antallet frihetsgrader, så vi har mulighet til å basere resultatene våre på flere moder i dette avsnittet enn det som var tilfelle i avsnitt 8.3. En del av de “ekstra” frihetsgradene er vertikale, hvilket betyr at det tas hensyn til dekkens svingninger i z -retning. I beregningene våre benyttes den kombinerte stivhetsmatrisen, men som nevnt i innledningen, er den basert på lineær elastisk teori. Det ser vi bort fra siden det ikke er krav om å ta hensyn til andre ordens effekter i NS 3491-12. Vi starter med å diskutere litt om programmet og beregningen generelt.

Ansys er et svært generelt analyseprogram basert på elementmetoden. Med hensyn på bruksområder favner det bredt, og det medfører et relativt vanskelig brukergrensesnitt. Mulighetene for å påvirke beregningene er store. Brukeren kan for eksempel velge hvilken metode som skal benyttes til å løse egenverdi-problemet i den modale analysen, og det kan spesifiseres ulik dempningsgrad for forskjellige materialer. En ulempe ved Ansys er at responsspektret ikke kan angis som en potensfunksjon. Det nærmeste vi kommer er en eksponensialfunksjon, og vi er derfor nødt til å angi mange punkter på spektret som Ansys kan interpolere mellom.

Nå begynner vi på analysen i x -retning. Dekkene modelleres som bjelker, hvis tverrsnittsareal finnes fra figur 7.4. Det gir

$$A_{dekke\ x} = 0.250 \cdot (4.0 + 7.6 + 4.0) m^2 = 3.9 m^2 \quad (10.1)$$

Dekkets andre arealmoment finnes fra samme snitt. Resultatet er

$$I_{zz\ dekke\ x} = \frac{1}{12} \cdot 0.250^3 \cdot (4.0 + 7.6 + 4.0) m^4 = 0.020 m^4. \quad (10.2)$$

Det dynamiske elastisitetsmodul til betongen anslås ut fra [6] som

$$E_{bet} = 40 \cdot 10^9 N/m. \quad (10.3)$$

Poissons tall finnes i [31] som

$$\nu_{bet} = 0.18. \quad (10.4)$$

Elastisitetsmodul til stål er gitt over ligning (8.3) som 210 kN/mm^2 . Tverrsnittsarealet til søylene finner vi fra ligning (8.3). Siden det er fire søyler bak hverandre i hver rad blir

$$A_{s\ x} = 4 \cdot 5669\text{ mm}^2 = 0.022\text{ m}^2 \quad (10.5)$$

Vindkryssenes tverrsnittsareal fremkommer på samme vis. Det er to vindkryss bak hverandre, og tverrsnittsarealet til hvert av disse er gitt i ligning (8.3). Altså er

$$A_v = 2 \cdot 2250\text{ mm}^2 = 0.0045\text{ m}^2. \quad (10.6)$$

Massetettheten til betongen beregnes fra egenvekten på 25 kN/m^3 [40] som gir

$$\rho_{dekke} = \frac{25\,000\text{ N/m}^3}{9.81\text{ m/s}^2} = 2.5 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3. \quad (10.7)$$

Nyttelasten og den påførte egenlasten angis per løpemeter på bjelkene som modellerer dekkene. For taket gir det

$$q_{takx} = \frac{(560 + 500) N/m^2}{9.81 m/s^2} \cdot (4.0 + 7.6 + 4.0) m = 1.7 \cdot 10^3 kg/m. \quad (10.8)$$

Nyttelasten og den påførte egenlasten på de andre dekkene er

$$q_{1-3x} = \frac{(900 + 500) N/m^2}{9.81 m/s^2} \cdot (4.0 + 7.6 + 4.0) m = 2.2 \cdot 10^3 kg/m. \quad (10.9)$$

I Ansys angis responsspektre for den naturlige frekvensen f . Det er den resiproke verdien av den naturlige svingeperioden, dvs.

$$f = \frac{1}{T}.$$

Vi må altså omregne designspektret i ligning (8.37) så det avhenger av frekvensen i stedet for svingeperioden.

$$\begin{aligned} S_{ed}(T) &= k_Q k_S \gamma_1 a_g S_e(T) k_{f,spiss} \\ &= \begin{cases} 0.7 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 0.93 m/s^2 \cdot (1 + \frac{1.5T}{0.1s}) \cdot 0.8 & \text{for } 0.00 s \leq T \leq 0.10 s \\ 0.7 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 0.93 m/s^2 \cdot 2.5 \cdot 0.8 & \text{for } 0.10 s < T \leq 0.25 s \\ 0.7 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 0.93 m/s^2 \cdot (2.5 \frac{0.25s}{T}) \cdot 0.8 & \text{for } 0.25 s < T \leq 1.5 s \\ 0.7 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 0.93 m/s^2 \cdot (2.5 \frac{0.375s^2}{T^2}) \cdot 0.8 & \text{for } 1.5 s < T \leq 4.0 s \end{cases} \Leftrightarrow \\ S_{ed}(f) &= \begin{cases} 0.49 m \cdot f^2 & \text{for } 0.25 s^{-1} \leq f < 0.67 s^{-1} \\ 0.33 m/s \cdot f & \text{for } 0.67 s^{-1} \leq f < 4.0 s^{-1} \\ 1.3 m/s^2 & \text{for } 4.0 s^{-1} \leq f < 10 s^{-1} \\ 0.52 m/s^2 \cdot (1 + \frac{15s^{-1}}{f}) & \text{for } 10 s^{-1} \leq f \end{cases}. \quad (10.10) \end{aligned}$$

Parametrene fra ligning (10.1) til (10.10) føres inn i Ansys sammen med geometrien fra figur 7.2 og 7.3. Dekkene modelleres som bjelker, mens det benyttes staver til søyler og vindkryss. Som i kapittel 8, modellerer vi kun ett stag i hvert vindkryss siden staven som får trykk vil knekke ut. Elementstørrelsen velges slik at resultatene ikke påvirkes av for store elementer.

Vi benytter Lanczos blokk-metode til å løse egenverdiproblemet fordi den anbefales for vårt formål i manualen til Ansys [2].

Som kombinasjonsregel velges CQC, og for å begrense beregningstiden benytter vi kun de viktiste modene. Vi velger ut disse ved å kreve at deres “significance level” skal være større enn 0.001. For en gitt mode k , er denne definert som

$$\chi = \frac{D(T_k) L_k / M_k}{D(T_i) L_i / M_i}, \quad (10.11)$$

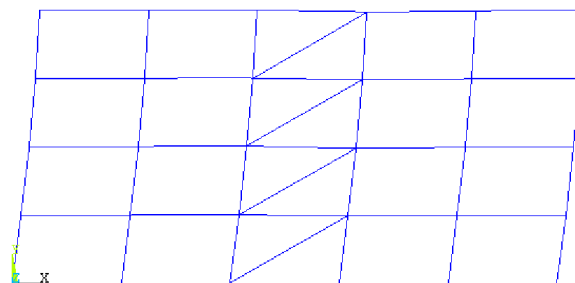
der mode i er den moden som gir størst χ . En sammenlikning av ligning (10.11) med ligning (3.31) viser at uttrykket over brøkstreken i ligning (10.11) er koeffisienten som ϕ_k skal multipliseres med, for å finne den maksimale forskyvningen til mode k .

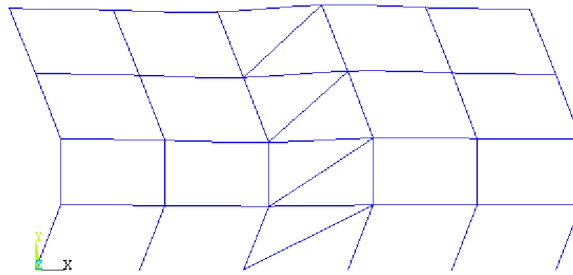
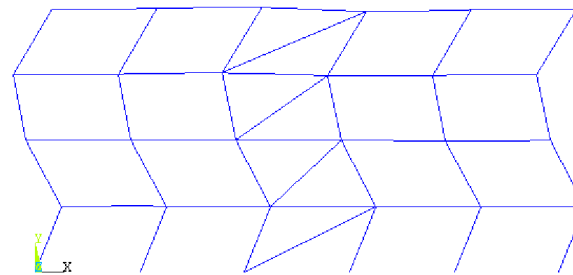
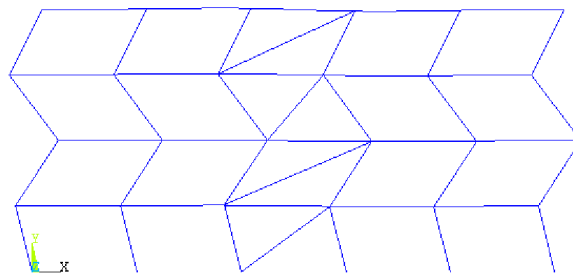
Tabell 10.1: Nøkkeltall for modene beregnet i Ansys for analysen i x -retning i henhold til NS 3491-12

k	f_k	T_k	$S_{ed}(T_k)$	L_k/M_k	χ	m_k	$\sum_{i=1}^k m_i/m_{tot}$
	s^{-1}	s	m/s^2			kg	
1	1.039	0.9625	0.3382	1011	1.000000	1022790	0.876195
2	3.034	0.3296	0.9877	340.7	0.115361	116085	0.975641
3	4.814	0.2077	1.3020	154.9	0.027461	23990.3	0.996193
4	5.936	0.1685	1.3020	-65.02	0.007583	4227.13	0.999814
5	9.016	0.1109	1.3020	11.15	0.000564	124.415	0.999921
6	9.446	0.1059	1.3020	4.677	0.000215	21.8699	0.999939
7	10.15	0.0985	1.2905	-6.638	0.000262	44.0580	0.999977
8	12.64	0.0791	1.1390	-6.638	0.000106	22.2439	0.999996
9	15.08	0.0663	1.0392	0.836	0.000012	0.69863	0.999997
10	17.31	0.0578	0.9734	-0.205	0.000002	0.04210	0.999997

Scriptet til Ansys er vist i C.1. Tabell 10.1 viser viktige parametre for de første 10 modene. Summen av de effektive modale massene er $1.17 \cdot 10^6 \text{ kg}$, hvilket stemmer med resultatet i ligning (8.26). En sammenlikning av den naturlige svingeperioden til de fire første modene i tabell 10.1 med de vi kom frem til i ligning (8.20), viser at Ansys gir lengre egensvingeperioder for de to første modene men kortere for den tredje og fjerde. Forskjellen skyldes de vertikale frihetsgradenes innflytelse på resultatene. Det er naturlig at flere frihetsgrader gir lengre svingeperioder for de første modene fordi massen i større grad er fordelt over konstruksjonen og dermed både gir horisontale og vertikale treghetskrefter. De ekstra frihetsgradene vil samtidig medføre endringer i de naturlige svingeformene, hvilket i vårt tilfelle gir kortere svingeperiode for den tredje og fjerde moden. Når vi sammenlikner den effektive modale massen for de første fire modene med ligning (8.25), ser vi at den er lik for den første moden i de to beregningsmetodene. For de neste tre modene er massen i ligning (8.25) mindre enn angitt i tabellen. Det virker rart siden summen av effektive modale masser skal være den samme i de to tilfellene. Situasjonen skyldes avrundingsfeil. Egentlig er de effektive modale massene til den første svingeformen i x -retning litt mindre i henhold til Ansys enn i henhold til ligning (8.25). Den første moden er altså mindre dominerende i henhold til Ansys enn i henhold til beregningene i avsnitt 8.2. Den siste kolonnen i tabell 10.1 viser at de høyere modene har svært liten innvirkning på resultatene.

Figur 10.1 til 10.4 viser de fire første svingformene. Det ses at de vertikale utslagene generelt er

Figur 10.1: Den første egensvingeformen i x -retning i henhold til Ansys

Figur 10.2: Den andre egensvingeformen i x -retning i henhold til AnsysFigur 10.3: Den tredje egensvingeformen i x -retning i henhold til AnsysFigur 10.4: Den fjerde egensvingeformen i x -retning i henhold til Ansys

små, og at svingeformene er svært lik de i figur 8.4. Det taler for at forskjellen mellom resultatene her og de fra avsnitt 8.3 blir liten.

I tabell 10.1 ser vi at det kun er de første fire modene som har $\chi > 0.001$, og det er derfor disse fire som kombineres.

Kraften i vindkryssene beregnes til

$$\mathbf{H}_{vk,x} = \frac{1}{2} \mathbf{V}_x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 163 \\ 254 \\ 318 \\ 380 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 82 \\ 127 \\ 159 \\ 190 \end{bmatrix} kN. \quad (10.12)$$

Resultatet i ligning (10.12) er 3 % større enn det i ligning (8.68) for den øverste etasjen. I tredje etasje er resultatet 0.5 % mindre enn det vi fant ved håndberegningen, i andre etasje er den 1 %

mindre og ved terreng er den kun 0.02 % mindre. Forskjellen i resultatene er altså neglisjerbar, så i dette eksemplet har de vertikale frihetsgradene og geometriske effektene fra plastisk deformasjon enten ingen eller nesten lik innvirkning på lastvirkningene på vindkryssene. Den totale skjærkraften i hver etasje kommer frem i ligning (10.12), og avvikene i forhold til resultatet i avsnitt 8.3 er tilsvarende avvikene for horisontallasten i hvert vindkryss.

Nå går vi over til analysen i y -retning. Her finnes dekkets tverrsnittsareal fra snittet i figur 7.3. Det gir

$$A_{dekke y} = 0.250 \cdot 5 \cdot 4.8 \text{ m}^2 = 6.0 \text{ m}^2, \quad (10.13)$$

og det andre arealmoment blir

$$I_{zz \text{ dekke } y} = \frac{1}{12} 0.250^3 \cdot 5 \cdot 4.8 \text{ m}^4 = 0.031 \text{ m}^4 \quad (10.14)$$

Det er seks søyler i hver rad for analyse i y -retning. Fra ligning (8.3) finner vi det totale tverrsnittsarealet som skal legges inn i analysen,

$$A_{sy} = 6 \cdot 5669 \text{ mm}^2 = 0.034 \text{ m}^2. \quad (10.15)$$

Tverrsnittsarealet til stavene i vindkryssene fant vi i ligning (10.6). Disse er like fordi det også her er to vindkryss bak hverandre og tverrsnittsarealet til stagene er likt for alle vindkryss i konstruksjonen.

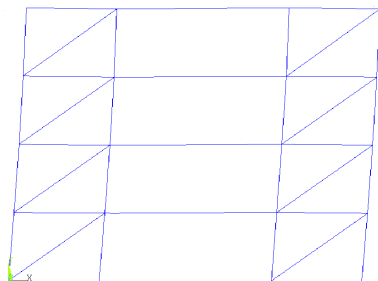
Massen fra nyttelast og påført egenlast beregnes per løpemeter,

$$q_{tak y} = \frac{(560 + 500) \text{ N/m}^2}{9.81 \text{ m/s}^2} \cdot 5 \cdot 4.8 \text{ m} = 2.6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}. \quad (10.16)$$

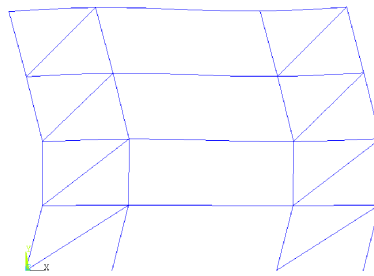
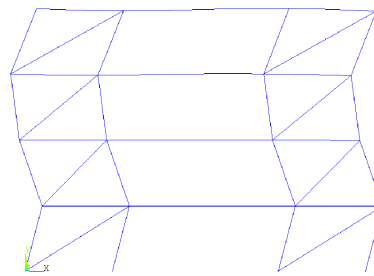
$$q_{1-3y} = \frac{(900 + 500) \text{ N/m}^2}{9.81 \text{ m/s}^2} \cdot 5 \cdot 4.8 \text{ m} = 3.4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}. \quad (10.17)$$

Nå har vi beregnet de nødvendige parametrene som skal legges inn i Ansys. Scriptet følger samme oppsett som det i x -retning, se vedlegg C.1.

Figur 10.5 til 10.8 viser de fire første naturlige svingeformene. De tre første stemmer svært bra

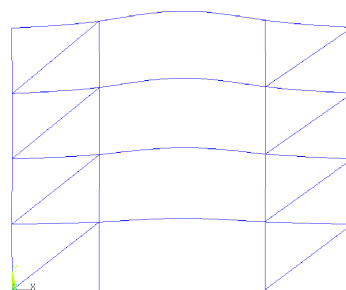


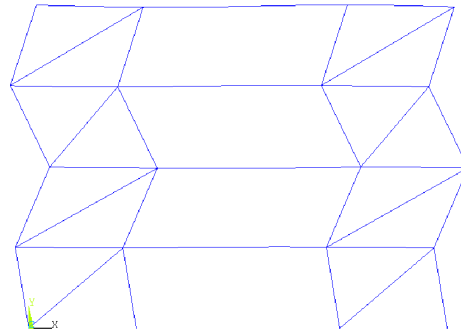
Figur 10.5: Den første naturlige svingeformen i y -retning i henhold til Ansys

Figur 10.6: Den andre naturlige svingeformen i y -retning i henhold til AnsysFigur 10.7: Den tredje naturlige svingeformen i y -retning i henhold til Ansys

med dem vi fant i håndberegningen, se figur 8.6. Den fjerde viser derimot vertikal svingning i stedet for horisontal. Derfor er den femte svingeformen i henhold til Ansys vist i figur 10.9. I x -retning ga ingen av de første fire egensvingeformene markant vertikal deformasjon. Grunnen til at det derimot fremkommer i y -retning er kombinasjonen av at spennet mellom akse B og C er vesentlig større enn noe spenn i x -retning, og at konstruksjonen generelt er stivere i y -retning. Dermed blir den naturlige svingeperioden til dekkene forholdsvis lange samtidig som svingeperiodene til de horisontale svingeformene er forholdsvis korte.

Tabell 10.2 viser viktige parametre for de første ti modene. Summen av de effektive modale massene stemmer også her med resultatet i ligning (8.26). En sammenlikning av de naturlige svingeperiodene i tabell 10.2 med de vi kom frem til i ligning (8.30) viser at Ansys gir lengre egensvingeperioder for de to første modene, nøyaktig som i x -retning. Situasjonen er motsatt for den tredje moden. Når det kommer til den fjerde moden i håndberegningene må vi sammenlikne denne med den femte moden fra Ansys for at de to svingeformene skal tilsvare hverandre. Her ser vi, at svin-

Figur 10.8: Den fjerde naturlige svingeformen i y -retning i henhold til Ansys

Figur 10.9: Den femte naturlige svingeformen i y -retning i hht AnsysTabell 10.2: Nøkkeltall for modene beregnet i Ansys for analysen i y -retning i henhold til NS 3491-12

k	f_k	T_k	$S_{ed}(T_k)$	L_k/M_k	χ	m_k	$\sum_{i=1}^k m_i/m_{tot}$
	s^{-1}	s	m/s^2			kg	
1	1.474	0.6784	0.4799	1010	1.000000	1019210	0.872698
2	4.310	0.2320	1.3020	345.7	0.108711	119516	0.975034
3	6.870	0.1256	1.3020	156.2	0.019333	24399.2	0.995926
4	6.994	0.1430	1.3020	12.60	0.001504	158.693	0.996061
5	8.472	0.1180	1.3020	-66.40	0.005404	4409.21	0.999837
6	10.12	0.0988	1.2931	3.917	0.000222	15.3396	0.999850
7	10.52	0.0951	1.2636	2.604	0.000133	6.78154	0.999856
8	10.61	0.0943	1.2571	0.976	0.000049	0.95272	0.999857
9	11.09	0.0917	1.2253	2.303	0.000103	5.30371	0.999531
10	13.16	0.0760	1.1144	10.47	0.000302	109.694	0.999955

geperioden Ansys kommer frem til, igjen er litt kortere enn resultatet i avsnitt 8.2. Det viser at de vertikale frihetsgradenes innflytelse på resultatene er ganske lik i x - og y -retning, se under tabell 10.1.

Den effektive modale massen for den første moden er lik i tabell 10.2 og ligning (8.34). For de andre modene er massen i (8.34) mindre enn angitt i tabellen når vi sammenlikner moder med tilsvarende forskyvningsform. Årsaken til dette er den samme som i x -retning, den effektive modale massen til den første svingeformen er litt mindre i henhold til Ansys enn i henhold til ligning (8.25), og altså mindre dominerende i henhold til Ansys. Den siste kolonnen i tabell 10.1 viser at de høyere modene også i y -retning har svært liten innvirkning på resultatene.

I tabell 10.2 ser vi at de fem første modene har $\chi > 0.001$, og det er derfor disse som kombineres ved hjelp av CQC. Den fjerde moden, som hovedsaklig gir vertikale utslag, har liten effektiv modal masse. Derfor kan vi forvente at resultatet vil være nesten lik det vi fant i avsnitt 8.3.

Den horisontale kraften i vindkryssene blir

$$\mathbf{H}_{vk,y} = \frac{1}{4} \mathbf{V}_y = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 222 \\ 353 \\ 444 \\ 527 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 56 \\ 88 \\ 111 \\ 132 \end{bmatrix} kN. \quad (10.18)$$

Resultatet i ligning (10.18) er mindre enn det i ligning (8.88) for de tre nederste etasjene. I forhold til lasten fra håndberegningen er den i den øverste etasjen 3 % større, i tredje etasje er resultatet 1 % mindre enn det vi fant ved håndberegning, i andre etasje er forskjellen på 3 % og ved terreng er den 1 %. Som i x -retning, er differansen altså neglisjerbar, så i dette eksemplet har de vertikale frihetsgradene og geometriske effektene nesten ingen innvirkning på lastvirkningene på vindkryssene selv om vi inkluderer en vertikal svingeform i beregningene. Den totale skjærkraften i hver etasje kommer frem i ligning (10.18), og avvikene i forhold til resultatet i avsnitt 8.3 tilsvarer avvikene for horisontallasten i hvert vindkryss.

10.3 Ansys og NS-EN 1998-1

I dette avsnittet skal vi finne lastene på konstruksjonen i henhold til NS-EN 1998-1. Analysen følger samme prosedyre som den i avsnitt 10.2, og modene blir derfor like. Forskjellen i resultatene ligger i responsspektret og tillegget for uønsket torsjon. Også i dette avsnittet neglisjerer vi innvirkningen den plastiske materialoppførselen har på den geometriske stivhetsmatrisen. I avsnitt 8.4 ble det nevnt at eurokoden krever at det tas hensyn til andre ordens effekter når disse har over 10 % innflytelse på resultatene. Basert på størrelsesordenen til den geometriske stivhetsmatrisen i ligning (8.18) i forhold til stivhetsmatrisene i ligning (8.16) og (8.28) konkluderer vi at det ikke er tilfelle her.

Designspektret omskrives fra formen i ligning (8.89) og (8.90),

$$S_{ed}(T) = \begin{cases} 0.744 m/s^2 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{T}{0.10 s} \left(\frac{2.5}{1.5} - \frac{2}{3}\right)\right) & \text{for } 0.00 s \leq T \leq 0.10 s \\ 0.744 m/s^2 \cdot \frac{2.5}{1.5} & \text{for } 0.10 s \leq T \leq 0.25 s \\ 0.744 m/s^2 \cdot \frac{2.5}{1.5} \cdot \frac{0.25 s}{T} & \text{for } 0.25 s \leq T \leq 1.5 s \\ 0.744 m/s^2 \cdot \frac{2.5}{1.5} \cdot \frac{0.25 s \cdot 1.5 s}{T^2} & \text{for } 1.5 s \leq T \leq 1.8 s \\ 0.2 \cdot 0.744 m/s^2 & \text{for } 1.8 s \leq T \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$S_{ed}(f) = \begin{cases} 0.149 m/s^2 & \text{for } f \leq 0.57 s^{-1} \\ 0.465 m \cdot f^2 & \text{for } 0.57 s^{-1} \leq f \leq 0.67 s^{-1} \\ 0.310 m/s \cdot f & \text{for } 0.67 s^{-1} \leq f \leq 4.0 s^{-1} \\ 1.24 m/s^2 & \text{for } 4.0 s^{-1} \leq f \leq 10 s^{-1} \\ 0.744 m/s^2 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{10 s^{-1}}{f}\right) & \text{for } 10 s^{-1} \leq f \end{cases} . \quad (10.19)$$

Vi begynner med analysen i x -retning. Scriptet til Ansys følger samme oppsett som det for NS 3491-12, se vedlegg C.1. Tabell 10.3 viser viktige parametre for de første 10 modene. Alt annet enn pseudoakselerasjonen tilsvarer verdiene i tabell 10.1.

Tabell 10.3: Nøkkeltall for modene beregnet i Ansys for analysen i x -retning i henhold til NS-EN 1998-1

k	f_k	T_k	$S_{ed}(T_k)$	L_k/M_k	χ	m_k	$\sum_{i=1}^k m_i/m_{tot}$
	s^{-1}	s	m/s^2			kg	
1	1.039	0.9625	0.3221	1011	1.000000	1022790	0.876195
2	3.034	0.3296	0.9406	340.7	0.115361	116085	0.975641
3	4.814	0.2077	1.2400	154.9	0.027461	23990.3	0.996193
4	5.936	0.1685	1.2400	-65.02	0.007583	4227.13	0.999814
5	9.016	0.1109	1.2400	11.15	0.000564	124.415	0.999921
6	9.446	0.1059	1.2400	4.677	0.000215	21.8699	0.999939
7	10.15	0.0985	1.2290	-6.638	0.000262	44.0580	0.999977
8	12.64	0.0791	1.0848	-4.716	0.000106	22.2439	0.999996
9	15.08	0.0663	0.9898	0.836	0.000012	0.69863	0.999997
10	17.31	0.0578	0.9271	-0.205	0.000002	0.04210	0.999997

Komplett kvadratisk kombinasjonen av modene med $\chi > 0.001$ gir den totale skjærkraften i hver etasje,

$$\mathbf{V}_{maks, x, 4\text{ moder}, CQC} = \begin{bmatrix} 155 \\ 242 \\ 303 \\ 362 \end{bmatrix} kN. \quad (10.20)$$

Sammenliknet med resultatet i ligning (8.107) er skjærkraften i (10.20) 3 % større i den øverste etasjen, 0.4 % mindre i tredje etasje, 1 % mindre i andre etasje og 0.2 % større ved terreng. Forskjellene er altså neglisjerbare.

Når vi skal regne ut den dimensjonerende horisontallasten i hvert vindkryss, må vi ta hensyn til forstørrelsesfaktoren for utilsiktet torsjon. Siden analysen er todimensjonal og vindkryssene i x -retning har samme avstand til stivhetssenteret er $\delta = 1.6$. Det gir

$$\mathbf{H}_{vk, x} = \delta \frac{1}{2} \mathbf{V}_{maks, x, 4\text{ moder}, CQC} = 1.6 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 155 \\ 241 \\ 302 \\ 361 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 124 \\ 193 \\ 242 \\ 289 \end{bmatrix} kN. \quad (10.21)$$

Forskjellen mellom disse lastene og de vi fant i ligning (8.111) er den samme som for skjærkraften.

Nå går vi over til lastvirkningene i y -retning. Scriptet til Ansys følger samme oppsett som det vi brukte i analysen av lastvirkningen i x -retning i henhold til NS 3491-12, se vedlegg C.1. Tabell 10.4 viser nøkkeltall for de første modene. Bortsett fra pseudoakselerasjonen er verdiene helt lik de i tabell 10.2. De første fem modenes svingeform ses i figur 10.5 til 10.9.

Tabell 10.4: Nøkkeltall for modene beregnet i Ansys for analysen i y -retning i henhold til NS-EN 1998-1

k	f_k	T_k	$S_{ed}(T_k)$	L_k/M_k	χ	m_k	$\sum_{i=1}^k m_i/m_{tot}$
	s^{-1}	s	m/s^2			kg	
1	1.474	0.6784	0.4570	1010	1.000000	1019210	0.872698
2	4.310	0.2320	1.2400	345.7	0.108711	119516	0.975034
3	6.870	0.1256	1.2400	156.2	0.019333	24399.2	0.995926
4	6.994	0.1430	1.2400	12.60	0.001504	158.693	0.996061
5	8.472	0.1180	1.2400	-66.40	0.005404	4409.21	0.999837
6	10.12	0.0988	1.2316	3.917	0.000222	15.3396	0.999850
7	10.52	0.0951	1.2034	2.604	0.000133	6.78154	0.999856
8	10.61	0.0943	1.1973	0.976	0.000049	0.95272	0.999857
9	11.09	0.0917	1.1670	2.303	0.000103	5.30371	0.999531
10	13.16	0.0760	1.0614	10.47	0.000302	109.694	0.999955

Komplett kvadratisk kombinasjon gir skjærkraften i hver etasje,

$$\mathbf{V}_{maks,y,4\text{moder},CQC} = \begin{bmatrix} 212 \\ 336 \\ 422 \\ 502 \end{bmatrix} kN. \quad (10.22)$$

Sammenliknet med resultatet i ligning (8.127) er skjærkraften i (10.20) 3 % større i den øverste etasjen og henholdsvis 1, 3 og 1 % mindre i tredje, andre og første etasje. Forskjellene er altså større enn i x -retning i alle etasjene, men de er fortsatt neglisjerbare.

Når vi skal regne ut den dimensjonerende horisontallasten i hvert vindkryss må vi ta hensyn til forstørrelsesfaktoren for utilsiktet torsjon. Denne er lik 1.6 siden analysen er todimensjonal og vindkryssene i y -retning har samme avstand til stivhetssenteret. Dermed blir

$$\mathbf{H}_{vk,y} = \delta \cdot \frac{1}{4} \mathbf{V}_{maks,y,4\text{moder},CQC} = 1.6 \cdot \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 212 \\ 336 \\ 422 \\ 502 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 85 \\ 134 \\ 169 \\ 201 \end{bmatrix} kN. \quad (10.23)$$

Differansen mellom disse lastene og de vi fant i ligning (8.129) tilsvarer avvikene for skjærkraften.

10.4 Sammenlikning og diskusjon

I dette avsnittet skal vi sammenlikne forskjellene mellom resultatene i dette kapitlet og de i kapittel 8. Forskjellene mellom resultatene i x - og y -retning og mellom de to regelverkene er allerede diskutert i avsnitt 8.6, og gjentas ikke her.

Tabell 10.5 viser forskjellene mellom resultatene vi fant ved håndberegning og dem vi nå har kommet frem til. Her ser vi at analysen med flere frihetsgrader generelt gir litt mindre last i de

nederste vindkryssene men til gjengjeld litt større last i de øverste. Forskjellene er større i y - enn i x -retning. Det skyldes at de geometriske effektene er mindre i y -retning fordi stivheten er større her. Samtidig har de vertikale frihetsgradene større effekt i y -retning på grunn av det store spennet mellom akse B og C. De vertikale frihetsgradene gir altså lengre egensvingeperioder, hvilket gir mindre laster, mens neglisjeringen av de plastiske effektene har liten innflytelse på den kombinerte stivhetsmatrisen og derfor ikke forkorter egensvingeperiodene nevneverdig.

Generelt er alle verdiene i tabell 10.5 så små at vi kan betrakte forskjellene som neglisjerbare.

Tabell 10.5: Forskjellene mellom resultatene fra dette kapitlet og de fra kapittel 8. Differansen er angitt i prosent, og negativ verdi betyr at metoden i dette kapitlet gir minst respons

Etasje	NS 3491-12		NS-EN 1998-1	
	x -retning	y -retning	x -retning	y -retning
4	3	-3	3	3
3	-0.5	-1	-0.4	-1
2	-1	-3	-1	-3
1	-0.02	-1	0.2	-1

Kapittel 11

Modale 3D-analyser fra dataprogrammer

11.1 Innledning

I dette kapitlet tar vi fortsatt for oss bygget i figur 7.1. Som i kapittel 10, skal vi gjennomføre analyser ved hjelp av dataprogrammer basert på elementmetoden. Forskjellen er at vi nå modellerer bygget i tre dimensjoner, så tilleggsfaktoren for utilsiktet eksentrisitet i henhold til eurokoden endres fra $\delta = 1.6$ til $\delta = 1.3$. Dermed kan vi forvente at lastvirkningene i henhold til de to regelverkene blir mer like i dette kapitlet enn i de foregående. I hver analyse er de første femten modene benyttet i komplett kvadratisk kombinasjon. Antallet er valgt fordi det gir nok effektiv modal masse til å tilfredsstille regelverkene.

Siden modellene er tredimensjonale, skal vi for første gang i denne hoveddelen ta hensyn til sjaktens innvirkning på resultatene. Sammenliknet med systemene i kapittel 8, 9 og 10 vil massen i dekke over første, andre og tredje etasje være mindre mens stivheten til disse dekkene også reduseres litt. Konsekvensene av sjakten vil derfor være begrensede.

Vi starter med å gjennomføre analyser i Ansys, først i henhold til NS 3491-12 i avsnitt 11.2, deretter i henhold til NS-EN 1998-1 i avsnitt 11.3. Fremgangsmåten er svært lik den i kapittel 10, og vi går derfor ikke inn på prosedyren i detalj.

I avsnitt 11.4 gjennomfører vi en modal tredimensjonal analyse i henhold til NS 3491-12 i dataprogrammet FEM-Design versjon 8, og i 11.5 gjør vi det samme i henhold til NS-EN 1998-1 i FEM-Design versjon 9. Vi benytter forskjellige versjoner av programmet fordi versjon 8 ble utviklet før det norske tillegget til eurokoden kom. Derfor er det ikke mulig å benytte versjon 8 for NS-EN 1998-1. Versjon 9 er derimot så ny at den ikke inneholder NS 3491-12 som snart ikke lenger er aktuell. Derfor er vi nødt til å benytte forskjellige versjoner av programmet, noe som medfører at elementtypene og løsningsprosedyren ikke blir like i de to analysene. Vi kom-

menterer resultatene etter hvert som vi oppnår dem, både i forhold til hverandre og resultatene i tidligere kapitler. Vi sammenlikner også metodene med teorigrunnlaget der det er bemerkelsesverdige forskjeller eller likheter som vi ikke har sett i tidligere kapitler. Helt til slutt, i avsnitt 11.6, oppsummerer vi konklusjonene våre og diskuterer de viktigste argumentene for disse.

11.2 Ansys og NS 3491-12

Vi begynner med beregning i Ansys i henhold til NS 3491-12. Som i kapittel 8, tas det hensyn til andre ordens effekter i beregningen av egensvingeperiodene ved at den kombinerte stivhetsmatrisen benyttes. Denne er ikke multiplisert med duktilitetsfaktoren, men vi neglisjerer avviket som følger av dette. Det dynamiske elastisitetsmodul til henholdsvis betong og stål er gitt i ligning (10.3) og over ligning (8.3), tverrsnittsarealet til søylene og vindkryssene finner vi i ligning (8.3) og massetettheten til betongen er gitt i ligning (10.7). Snølasten og den påførte egenlasten på taket er

$$q_{tak\ x} = \frac{(560 + 500) \text{ N/m}^2}{9.81 \text{ m/s}^2} = 108 \text{ kg/m}^2. \quad (11.1)$$

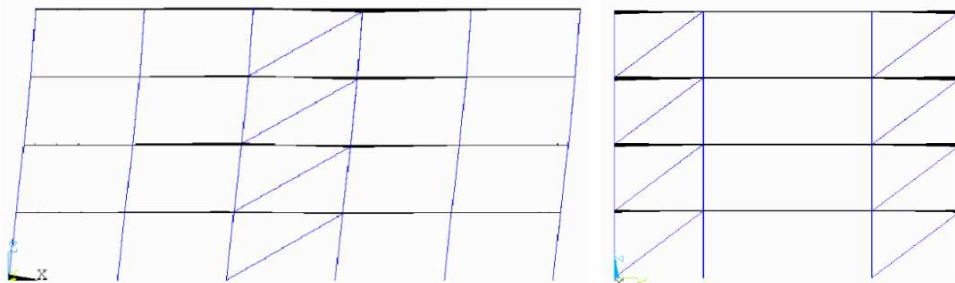
Nyttelast og påført egenlast på de andre dekkene er

$$q_{1-3\ x} = \frac{(900 + 500) \text{ N/m}^2}{9.81 \text{ m/s}^2} = 143 \text{ kg/m}^2. \quad (11.2)$$

Responsspektret er gitt i ligning (10.10).

Parametrene føres inn i Ansys sammen med geometrien fra figur 7.2, 7.3 og 7.4. Dekkene modelleres som skall, mens det benyttes staver til søyler og vindkryss. Som i kapittel 8, modellerer vi kun ett stag i hvert vindkryss siden det som belastes med trykk, i praksis vil knekke ut. Analysen deles i to, en for belastning i x -retning og en for belastning i y -retning. Scriptet til Ansys er gitt i vedlegg C.2 for analysen med grunnakselerasjon i x -retning.

Den første egensvingeformen er vist i figur 11.1. Det ses at den er nesten identisk med den første svingeformen i x -retning fra den todimensjonale analysen vår, se figur 10.1. Egensvingeperioden



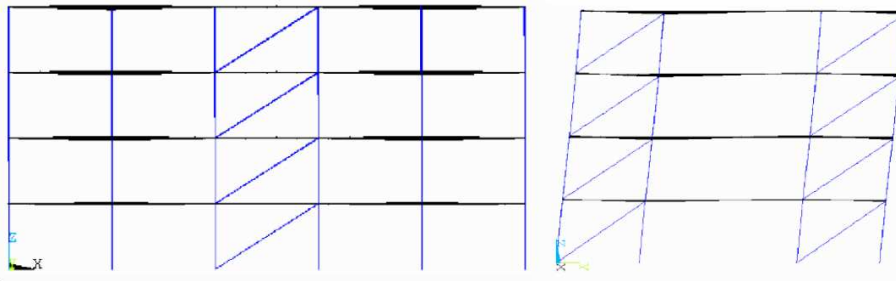
Figur 11.1: Den første naturlige svingeformen i henhold Ansys. Det ses at denne moden angir forskyvning i x -retning

Tabell 11.1: Nøkkeltall for modene beregnet i Ansys for analysen der grunnakselerasjonen virker i x -retning og lastvirkningene er beregnet i henhold til NS 3491-12

k	f_k	T_k	$S_{ed}(T_k)$	L_k/M_k	χ	m_k	$\sum_{i=1}^k m_i/m_{tot}$
	s^{-1}	s	m/s^2			kg	
1	0.960	1.0412	0.3126	996.8	1.0000	993695	0.856981
2	1.355	0.7380	0.4409	1.4	0.0010	1.95	0.856982
3	1.500	0.6667	0.4882	-9.7	0.0062	93.26	0.857063
4	2.868	0.3487	0.9335	367.2	0.1234	134811	0.973326
5	4.049	0.2470	1.3020	-0.1	0.0000	0.02	0.973326
6	4.455	0.2245	1.3020	0.2	0.0000	0.03	0.973326
7	4.677	0.2138	1.3020	162.0	0.0286	26257.1	0.995971
8	5.795	0.1726	1.3020	-68.3	0.0078	4668.00	0.999996
9	6.502	0.1538	1.3020	0.3	0.0000	0.08	0.999996
10	6.632	0.1508	1.3020	0.0	0.0000	0.00	0.999996
11	7.101	0.1408	1.3020	0.4	0.0000	0.13	0.999997
12	7.247	0.1380	1.3020	-0.0	0.0000	0.00	0.999997
13	8.041	0.1244	1.3020	-2.0	0.0001	3.94	1.00000
14	8.247	0.1213	1.3020	0.1	0.0000	0.01	1.00000
15	8.991	0.1112	1.3020	0.3	0.0000	0.00	1.00000

finner vi i tabell 11.1 som viser utvalgte resultater for de første 15 modene. Sammenliknet med egensvingeperioden til den første moden i x -retning fra håndberegningen i ligning (8.20), er denne hele 11 % lengre. Det var å forvente at den første svingeformen ga utslag i x -retning siden det er konstruksjonens mest fleksible hovedretning. Det er også naturlig at den tredimensjonale modellen gir en lengre tilhørende svingeperiode enn den todimensjonale siden det er flere frihetsgrader i 3D-modellen. De ekstra frihetsgradene medfører at massen i større grad er fordelt over konstruksjonen og dermed både gir horisontale og vertikale treghetskrefter. Det at egensvingeperioden er så mye lengre i denne analysen enn i kapittel 8 viser at avvikene fra neglisjeringen av duktilitetsfaktoren i beregningen av den geometriske stivhetmatrisen er betydningsløse.

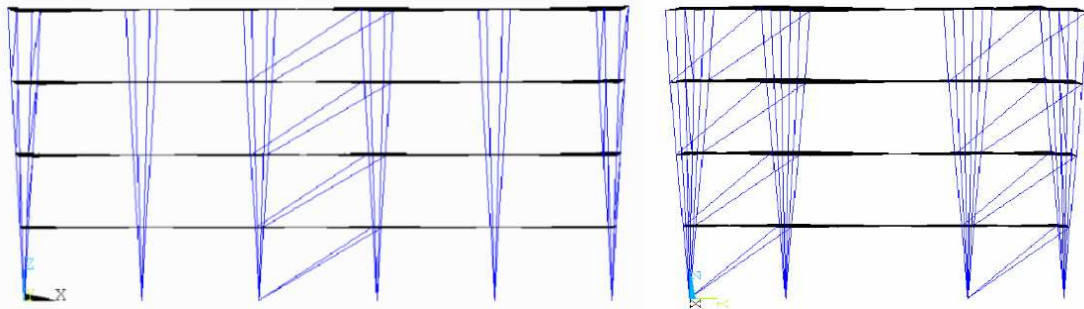
Figur 11.2 viser den andre svingeformen. Denne er svært lik den første svingeformen i y -retning,



Figur 11.2: Den andre naturlige svingeformen i henhold Ansys. Det ses at denne moden angir forskyvning i y -retning

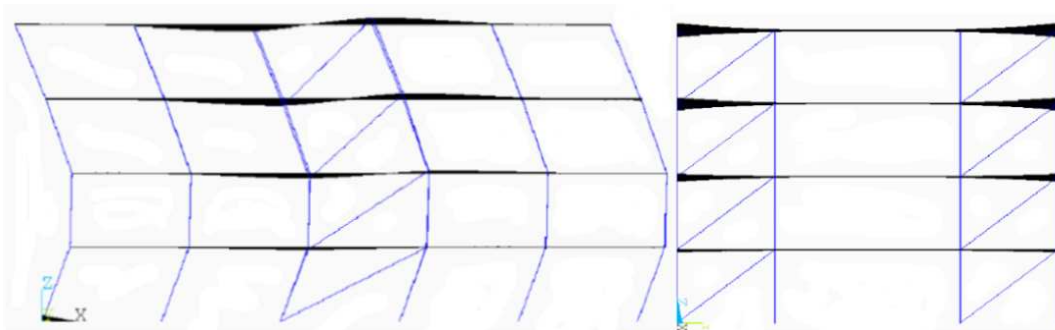
se figur 8.6. Egensvingeperioden som fremgår av tabell 11.1, er 12 % lengre enn den fra håndberegningen som er gitt i ligning (8.30). Igjen er det de ekstra frihetsgradene som forklarer forskjellen. Siden bygget er dobbeltsymmetrisk kan hver mode kun foreskrive forskyvning i en retning. For den andre moden er dette uten tvil y -retningen, og den effektive modale massen som er angitt i tabell 11.1, skyldes numeriske feil.

Den tredje svingeformen er vist i figur 11.3. Det ses at dette er en torsjonsmode. Siden bygget er fullstendig dobbeltsymmetrisk skal en slik mode egentlig ikke eksistere. At Ansys likevel har kommet frem til den, skyldes en numerisk feil som illustrerer at elementmetoden ikke gir eksakte resultater. Tilfellet er det samme for den sjette, tolvte og femtende moden, se figur 11.6, 11.12 og 11.15. Grunnen til at disse modene ikke har effektiv modal masse forklares under ligning (11.7).



Figur 11.3: Den tredje naturlige svingeformen i henhold Ansys. Det ses at denne moden angir torsjon

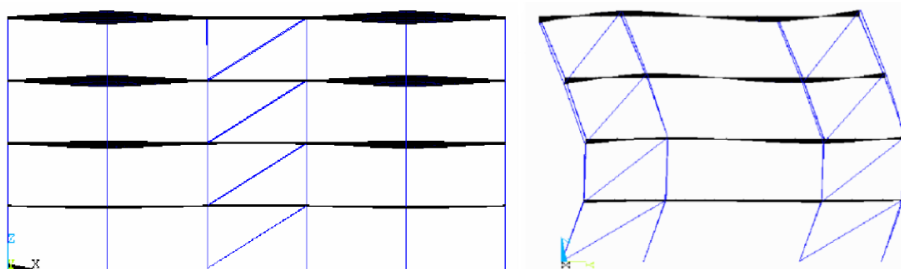
Figur 11.4 viser den fjerde svingeformen som tilsvarende den andre moden i x -retning. En sammenlikning av den tilhørende egensvingeperioden i tabell 11.1 med den i ligning (8.20), viser at den tredimensjonale analysen gir en naturlig svingeperiode som er 8 % lengre enn egensvingeperioden fra håndberegningen. Forskjellen mellom egensvingeperiodene til den andre moden fra de to analysene er altså bare litt over to tredjedeler av forskjellen for den første moden. Den er mindre her fordi de vertikale bevegelsene er mindre i denne moden enn i den første. Differansen er enda mindre for den syvende og åttende moden som tilsvarende henholdsvis den tredje og fjerde moden i x -retning. Den tredje (syvende) er bare 1 % kortere i ligning (8.20) enn i tabell 11.1, og den fjerde (åttende) er 0.3 % lengre i ligning (8.20) enn i tabellen. Det skyldes både undervurderingen av bid-



Figur 11.4: Den fjerde naturlige svingeformen i henhold Ansys. Det ses at denne moden angir forskyvning i x -retning

raget fra andre ordens effekter, og at vi ikke tok hensyn til sjakten i analysen som ledte til resultatet i (8.20), at den fjerde moden ikke er lengre i den tredimensjonale analysen enn i håndberegningen. Sjakten reduserer massen hvilket gjør de naturlige egensvingeperiodene kortere. Svingeformene til mode 7 og 8 er vist i figur 11.7 og 11.8.

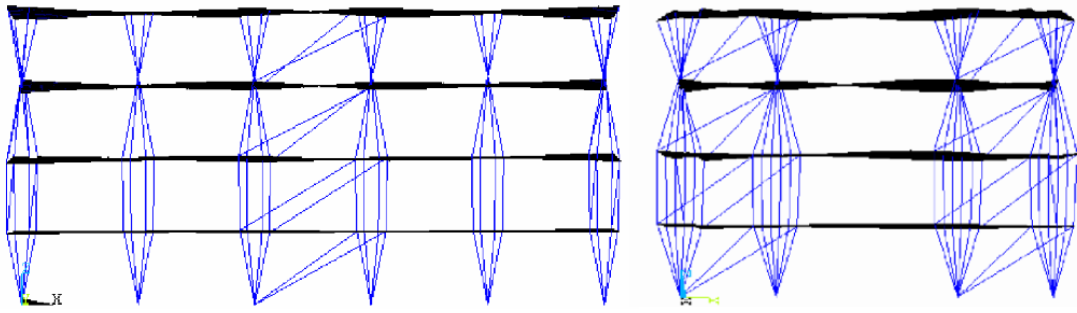
Svingeformen til den femte moden tilsvarende den andre moden i y -retning. Det ses i figur 11.5. Den tilhørende naturlige svingeperioden er 8 % lengre enn den som er gitt i ligning (8.30). Som forventet, er forskjellen altså vesentlig mindre enn for den første moden, og tendensen bekreftes av mode ti og fjorten som tilsvarende den tredje og fjerde moden i y -retning. For den tredje (tiende) moden gir den tredimensjonale modellen en egensvingeperiode som er 0.6 % lengre enn den tredje moden i ligning (8.30), og den fjerde (fjortende) i dette avsnittet er 1 % kortere enn den fra håndberegningen. Svingeformene til den tiende og fjortende moden er vist i figur 11.10 og 11.14. Vi har altså kommet frem til at den tredimensjonale analysen i syv av otte tilfeller gir lengre egensvingeperioder enn håndberegningen, og at forskjellen er størst for de første modene. Forklaringen ligger i følgende:



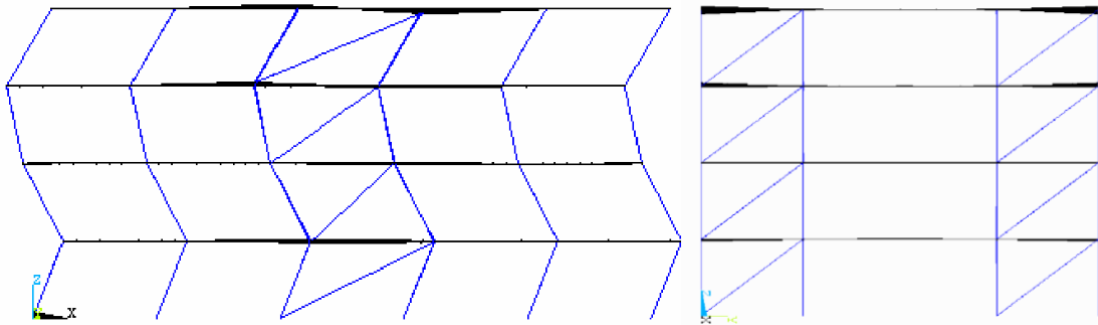
Figur 11.5: Den femte naturlige svingeformen i henhold Ansys. Det ses at denne moden angir forskyvning i y -retning

- Den tredimensjonale analysen benytter flere frihetsgrader enn systemet i håndberegningen. Det betyr at massen er mer fordelt over konstruksjonen hvilket gir en bedre representasjon av treghetskreftene
- Det tas i den tredimensjonale analysen hensyn til den vertikale deformasjonen av dekkene. Disse er mest betydningsfulle i de høyere modene og korter ned egensvingeperiodene
- I den tredimensjonale analysen har vi neglisjert duktilitetsfaktoren i beregningen av den geometriske stivhetsmatrisen. Det gir et stivere system og gjør dermed egensvingeperiodene kortere. Effekten av dette er størst for høyere moder
- I håndberegningen tok vi ikke hensyn til sjakten i analysen. Det betyr at byggets totale masse er mindre i den tredimensjonale analysen enn i håndberegningen, og også dette begrenser lengden på egensvingeperiodene

Den niende egensvingeformen er den første som kun gir vertikale utslag. Den er vist i figur 11.9. Utslagene er størst i det mest fleksible spennet som ligger mellom akse B og C. Den modale massen i x -retning som fremkommer i tabell 11.1, skyldes numeriske feil, nøyaktig som for modene



Figur 11.6: Den sjette naturlige svingeformen i henhold til Ansys. Det ses at denne moden angir torsjon



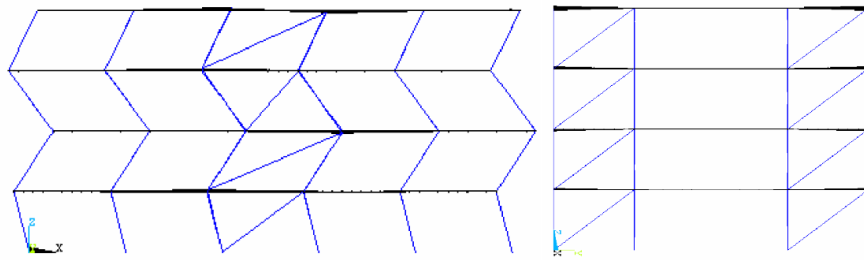
Figur 11.7: Den syvende naturlige svingeformen i henhold til Ansys. Det ses at denne moden angir forskyvning i x -retning

i y -retning. Også den ellevte og trettende moden angir svingning utelukkende i vertikal retning. Svingeformene deres er vist i figur 11.11 og 11.13.

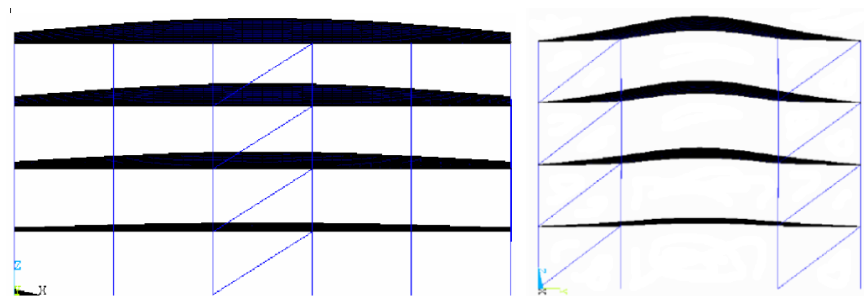
Ifølge tabell 11.1 har den første, tredje, fjerde, syvende og åttende moden $\chi > 0.001$, og disse kombineres derfor ved hjelp av CQC. Bidraget fra den tredje moden er lite fordi dens effektive modale masse i x -retning er neglisjerbar. Det er en konsekvens av at denne moden teoretisk sett ikke skal eksistere. Den maksimale horisontale lasten på vindkryssene i x -retning blir

$$\mathbf{H}_{vk,x} = \frac{1}{2} \mathbf{V}_x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 159 \\ 237 \\ 294 \\ 353 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 79 \\ 118 \\ 147 \\ 177 \end{bmatrix} kN. \quad (11.3)$$

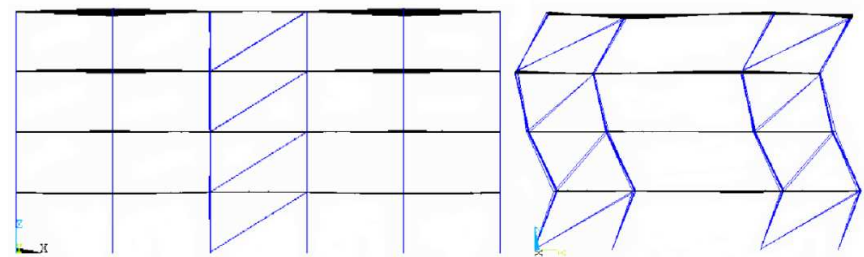
Bortsett fra i den øverste etasjen, er lastene i ligning (11.3) alle mindre enn resultatet fra håndberegningen som er gitt i (8.68). I den øverste etasjen er forskjellen på kun en halv prosent, men i den tredje etasjen gir den tredimensjonale analysen en horisontallast som er 7 % kortere enn resultatet fra håndberegningen. I den andre etasjen er forskjellen på 9 % og ved terreng er den på 7 %. Årsaken til at den tredimensjonale analysen generelt gir lavere laster er at den også gir lengre egensvingeperioder pga. fordelingen av massen over konstruksjonen. Unntaket i den øverste etasjen skyldes at lastene her er mer avhengig av de høyere modene som, grunnet sjakten og geometriske effekter, har kortere egensvingeperiode i henhold til analysen i dette avsnittet.



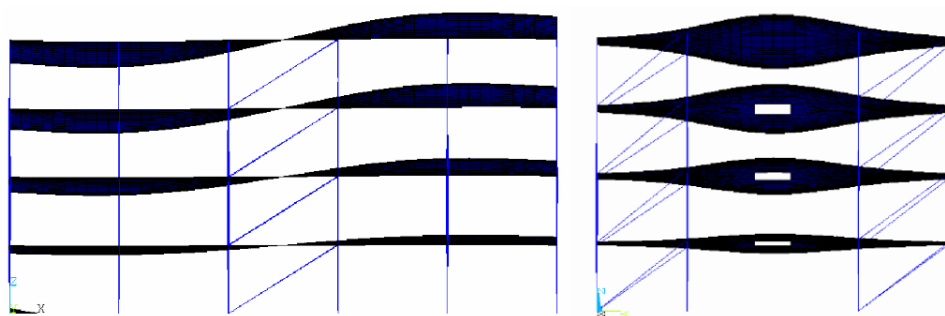
Figur 11.8: Den åttende naturlige svingeformen i henhold til Ansys. Det ses at denne moden angir forskyvning i x -retning



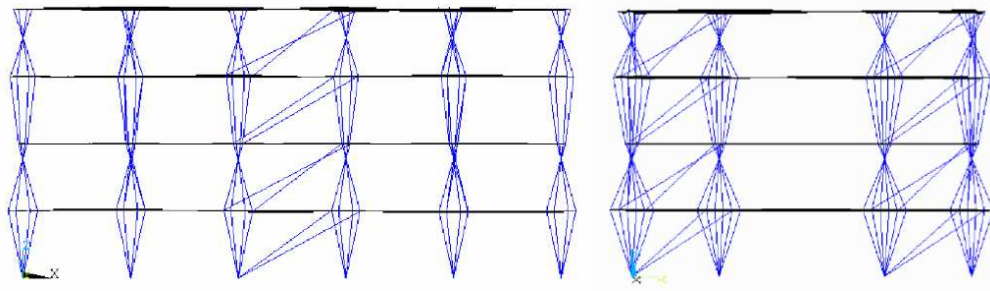
Figur 11.9: Den niende naturlige svingeformen i henhold til Ansys. Det ses at denne moden angir forskyvning i z -retning



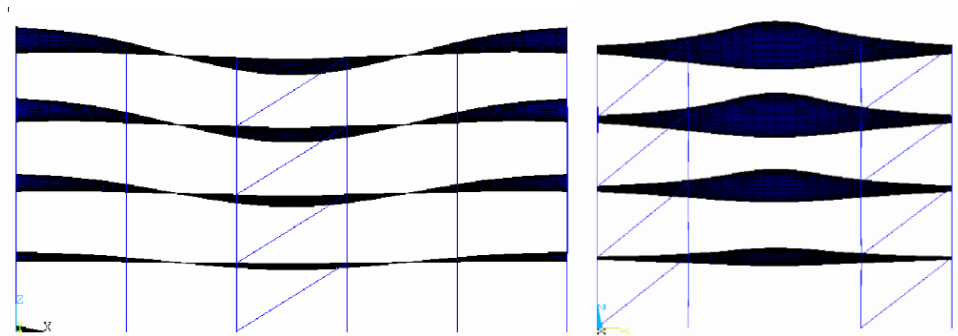
Figur 11.10: Den tiende naturlige svingeformen i henhold til Ansys. Det ses at denne moden angir forskyvning i y -retning



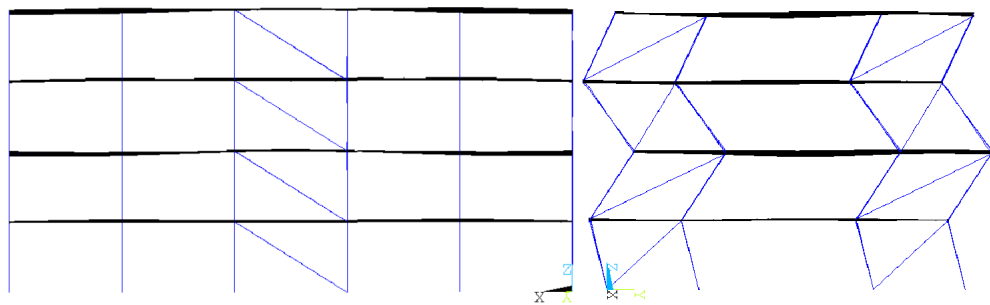
Figur 11.11: Den ellefte naturlige svingeformen i henhold til Ansys. Det ses at denne moden angir forskyvning i z -retning, men har ingen effektiv modal masse pga. antisymmetri



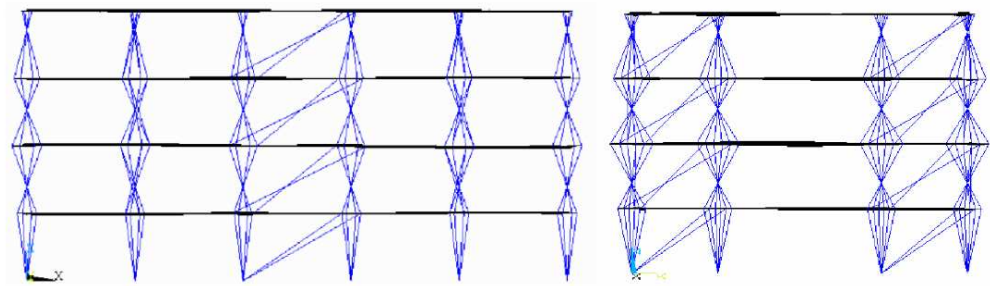
Figur 11.12: Den tolvte naturlige svingeformen i henhold til Ansys. Det ses at denne moden angir torsjon



Figur 11.13: Den trettende naturlige svingeformen i henhold til Ansys. Det ses at denne moden angir forskyvning i z -retning



Figur 11.14: Den fjortende naturlige svingeformen i henhold til Ansys. Det ses at denne moden angir forskyvning i y -retning



Figur 11.15: Den femtende naturlige svingeformen i henhold til Ansys. Det ses at denne moden angir torsjon

Nå går vi videre til lastvirkningene i y -retning. Scriptet tilsvare det i vedlegg C.2. Tabell 11.2 viser en rekke karakteristiske verdier for de første 15 modene. Bortsett fra den effektive modale massen og χ er verdiene som i tabell 11.1. Modene som har $\chi > 0.001$, kombineres ved CQC. I dette tilfellet er det mode 1, 2, 3, 5, 9, 10 og 14. Det skyldes numeriske feil at den første, tredje og niende moden er med i kombinasjonen, men deres effektive modale masser i y -retning er så små at deres innflytelse på resultatet uansett blir neglisjerbar. Resultatet av kombinasjonen er

Tabell 11.2: Nøkkeltall for modene beregnet i Ansys for analysen der grunnakselerasjonen virker i y -retning og lastvirkningene er beregnet i henhold til NS 3491-12

k	f_k	T_k	$S_{ed}(T_k)$	L_k/M_k	χ	m_k	$\sum_{i=1}^k m_i/m_{tot}$
	s^{-1}	s	m/s^2			kg	
1	0.960	1.0412	0.3126	1.6	0.0023	2.59	0.000002
2	1.355	0.7380	0.4409	994.9	1.0000	989727	0.853815
3	1.500	0.6667	0.4882	14.9	0.0135	221.80	0.854006
4	2.868	0.3487	0.9335	-0.1	0.0000	0.01	0.854006
5	4.049	0.2470	1.3020	369.8	0.1229	136721	0.971952
6	4.455	0.2245	1.3020	0.4	0.0001	0.14	0.971952
7	4.677	0.2138	1.3020	-0.1	0.0000	0.00	0.971952
8	5.795	0.1726	1.3020	0.0	0.0000	0.00	0.971952
9	6.502	0.1538	1.3020	17.7	0.0023	311.45	0.972221
10	6.632	0.1508	1.3020	164.8	0.0204	27166.9	0.995657
11	7.101	0.1408	1.3020	-0.0	0.0000	0.00	0.995657
12	7.247	0.1380	1.3020	0.3	0.0000	0.07	0.995657
13	8.041	0.1244	1.3020	8.8	0.0007	77.51	0.995724
14	8.247	0.1213	1.3020	-70.4	0.0056	4956.75	1.00000
15	8.991	0.1112	1.3020	-0.1	0.0000	0.16	1.00000

$$\mathbf{H}_{vk,y} = \frac{1}{4} \mathbf{V}_y = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 222 \\ 334 \\ 442 \\ 498 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 56 \\ 83 \\ 103 \\ 124 \end{bmatrix} kN. \quad (11.4)$$

Det er kun i den øverste etasjen at lastvirkningene i ligning (11.4) ikke er mindre enn resultatet fra håndberegningen som er gitt i ligning (8.88). I den øverste etasjen er kraften fra den tredimensjonale beregningen 3 % større enn resultatet vi fant ved håndberegningen fordi den første svingeformen er mindre dimensjonerende i denne analysen enn i den med færre frihetsgrader. Skjærkraften er mer avhengig av de høyere modene i den øverste etasjen enn i de andre etasjene, og derfor er avviket annerledes her. I den tredje, andre og første etasjen er forskjellen mellom resultatet i ligning (11.4) og (8.88) på henholdsvis 7, 10 og 7 %.

11.3 Ansys og NS-EN 1998-1

Nå tar vi for oss lastvirkningene i henhold til NS-EN 1998-1. Analysene følger samme prosedyre som de i avsnitt 11.2. Det vil si at det er den kombinerte stivhetsmatrisen uten duktilitetsfaktor som benyttes i den modale analysen, at dekkene modelleres med skallelementer, og at det benyttes stavelementer til søyler og vindkryss. Responsspektret er gitt i ligning (10.19). Scriptene til Ansys tilsvarende det for belastning i x -retning i henhold til NS 3491-12 som er vist i vedlegg C.2.

Vi begynner med resultatene i x -retning. Den viktigste informasjonen om de første 15 modene er gitt i tabell 11.3. Verdiene i denne er helt tilsvarende de i tabell 11.1 og 11.2 i alle kolonner bortsett fra den som angir pseudoakselerasjonen. Derfor er tabellene for x - og y -retning slått sammen i dette avsnittet, og kolonnene med frekvens, L_k/M_k og χ er utelatt. Horisontallasten på vindkryssene i x -retning blir:

$$\mathbf{H}_{vk,x} = \delta \frac{1}{2} \mathbf{V}_x = 1.3 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 152 \\ 225 \\ 280 \\ 337 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 98 \\ 147 \\ 182 \\ 219 \end{bmatrix} kN. \quad (11.5)$$

Den dimensjonerende, horisontale lasten er mindre i ligning (11.5) enn i ligning (8.111) i alle fire etasjer. Forskjellen er henholdsvis 18, 24, 26 og 24 % i fjerde, tredje, andre og første etasje. Det at tillegget for utilsiktet eksentrisitet er redusert gir i seg selv en forskjell på 19 %, så det må også finnes andre grunner til at lastene er mindre i denne analysen. Den viktigste årsaken er, som i

Tabell 11.3: Nøkkeltall for modene beregnet i Ansys for analysen der grunnakselerasjonen virker i x - og y -retning og lastvirkningene er beregnet i henhold til NS-EN 1998-1

k	T_k	$S_{ed}(T_k)$	m_{kx}	$\sum_{i=1}^k m_{ix}/m_{tot}$	m_{ky}	$\sum_{i=1}^k m_{iy}/m_{tot}$
	s	m/s^2	kg		kg	
1	1.0412	0.2977	993695	0.856981	2.59	0.000002
2	0.7380	0.4200	1.95	0.856982	989727	0.853815
3	0.6667	0.4650	93.26	0.857063	221.80	0.854006
4	0.3487	0.8890	134811	0.973326	0.01	0.854006
5	0.2470	1.2400	0.02	0.973326	136721	0.971952
6	0.2245	1.2400	0.03	0.973326	0.14	0.971952
7	0.2138	1.2400	26257.1	0.995971	0.00	0.971952
8	0.1726	1.2400	4668.00	0.999996	0.00	0.971952
9	0.1538	1.2400	0.08	0.999996	311.45	0.972221
10	0.1508	1.2400	0.00	0.999996	27166.9	0.995657
11	0.1408	1.2400	0.13	0.999997	0.00	0.995657
12	0.1380	1.2400	0.00	0.999997	0.07	0.995657
13	0.1244	1.2400	3.94	1.00000	77.51	0.995724
14	0.1213	1.2400	0.01	1.00000	4956.75	1.00000
15	0.1112	1.2400	0.00	1.00000	0.16	1.00000

avsnitt 11.2, at egensvingeperiodene er lengre i denne beregningen fordi de ekstra frihetsgradene gir mindre tilført stivhet. Grunnen til at forskjellen for den øverste etasjen er på mindre enn 19 %, er at lasten her er svært avhengig av de høyere modene. I analysen i dette avsnittet har de høyere modene større effektive modale masser og kortere egensvingeperioder enn vi kom frem til i kapittel 8. Det resulterer i større lastvirkninger.

Analysen i y -retning utføres på samme vis, og de viktigste resultatene for modene er gitt i tabell 11.3. Kun pseudoakselerasjonen avviker fra verdiene i tabell 11.2.

De horisontale lastene på vindkryssene i hver etasje blir

$$\mathbf{H}_{vk,y} = \delta \frac{1}{4} \mathbf{V}_y = 1.3 \cdot \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 211 \\ 318 \\ 392 \\ 474 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 68 \\ 103 \\ 127 \\ 154 \end{bmatrix} kN. \quad (11.6)$$

Som i x -retning, er resultatene her alle mindre enn de vi kom frem til i avsnitt 8.4. Forskjellen på kraften i ligning (11.6) og den i (8.129) er på 16 % i den øverste etasjen, 24 % i tredje, 27 % i andre etasje og 24 % ved terreng. Reduksjonen i forstørrelsesfaktoren for utilsiktet eksentrisitet står i seg selv for 19 % reduksjon. Uten den ville (11.6) gitt en større last i den øverste etasjen enn (8.129). Det skyldes at skjærkraften i den øverste etasjen er mer avhengig av de høyere modene enn den er i de tre nederste etasjene. Som nevnt, blir den effektive modale massen til de høyere modene større i den tredimensjonale analysen enn det vi kom frem til i avsnitt 8.2, og det gir størst utslag i den øverste etasjen. Det samme forholdet har den motsatte effekten i de øvrige etasjene. Disse avhenger i større grad av den første moden, som både har lavere effektiv modal masse og lengre egensvingeperiode i henhold til 3D-analysen enn ifølge håndberegningen.

11.4 FEM-Design og NS 3491-12

Dataprogrammet FEM-Design 3D-Structure er utviklet for prosjektering av konstruksjoner ved hjelp av elementmetoden [45]. Det er et program med grafisk og relativt enkelt brukergrensesnitt. Siden det er utviklet for mer spesifikk bruk enn Ansys, og for å holde brukergrensesnittet enkelt, er det ikke fullt så stor mulighet for å påvirke beregningsmetodene i dette programmet som i Ansys. Det er for eksempel ikke mulig å velge mellom mer enn to kategorier av elementtyper, kalt standard eller fin. Det er heller ikke mulig å benytte den kombinerte stivhetsmatrisen i beregningen av de naturlige svingeperiodene, eller å spesifisere forskjellig dempningsforhold for ulike materialer. Som nevnt i innledningen til dette kapitlet, benyttes versjon 8 av programmet til analysen i henhold til NS 3491-12. Her er det ikke mulig å definere stav-elementer som ikke er vertikale. Det betyr at stavene i vindkryssene må modelleres som bjelker. Dersom den “fine” elementtypen benyttes, kommer programmet frem til at stavene knekker og beregningen avbrytes. Det er korrekt at staven i vindkrysset vil knekke ut når den utsettes for trykk. Meningen er at det til enhver tid skal være staven som strekkes, som tar opp lasten. Siden det ikke er mulig å modellere elementer som kun kan ta opp strekk, men ikke trykk, er vi derfor nødt til kun å modellere ett av stagene i vindkrysset og benytte elementtypen som kalles “standard” for å kunne gjennomføre beregningen. Det er ikke

mulig å benytte “standard”-elementer på noen konstruksjonsdeler og “fine” elementer på andre så hele konstruksjonen modelleres med relativt dårlige elementer. Derfor må elementstørrelsen være ekstremt liten, noe som medfører lang beregningstid.

En annen effekt av det enkle brukergrensesnittet er at det automatisk gjennomføres responsspekteranalyse for vertikal grunnakselerasjon. Her er pseudoakselerasjonen i henhold til NS 3491-12 gitt som

$$S_{ed}(T_k) = 0.7 \gamma_1 a_g S_e(T_k) k_{f,spiss},$$

der parametrene verdier er gitt i avsnitt 8.3. Som nevnt i avsnitt 4.3, tas det ikke hensyn til grunnforholdene ved prosjektering for den vertikale grunnakselerasjonen fordi det ikke finnes nok data omkring effekten av disse når grunnakselerasjonen er vertikal [15].

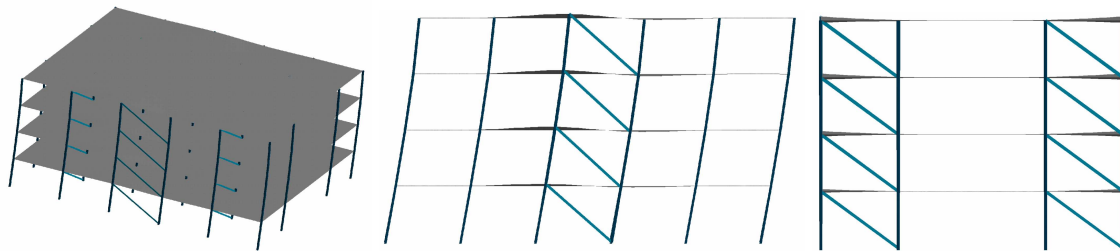
FEM-Design kan gjennomføre to typer seismiske analyser [46]. Den ene er analyse av et generalisert en-frihetsgradsystem der enten den første moden eller en lineær svingeform benyttes. Den andre er modal 3D-analyse, og det er den vi skal benytte. Vi gjennomfører derfor en beregning av konstruksjonens egensvingeformer med tilhørende naturlige svingeperioder og effektive modale masser. Resultatet er vist i tabell 11.4. Her ses det at den første moden har stor effektiv modal

Tabell 11.4: Modenes naturlige svingeperioder og effektive modale masser for bygget i figur 7.1 ifølge FEM-Design versjon 8. De effektive modale massene er angitt i prosent av byggets totale masse

k	T	m_{kx}	m_{ky}	m_{kz}
	s	%	%	%
1	1.079	87.0	0.0	0.0
2	0.773	0.0	86.5	0.0
3	0.700	0.0	0.0	0.0
4	0.361	11.0	0.0	0.0
5	0.258	0.0	11.4	0.0
6	0.235	0.0	0.0	0.0
7	0.217	1.7	0.0	0.0
8	0.173	0.3	0.0	0.0
9	0.168	0.0	0.0	54.0
10	0.156	0.0	0.0	0.0
11	0.153	0.0	1.7	0.0
12	0.141	0.0	0.0	2.9
13	0.141	0.0	0.0	0.0
14	0.126	0.0	0.0	2.3
15	0.123	0.0	0.0	0.4

masse i x -retning og ingen i y - og z -retning. Den tilhørende naturlige svingeperioden er på 1.079 sekunder. I ligning (8.20) kom vi frem til at den første egensvingeperioden i x -retning varer 0.936 sekunder, så resultatet fra FEM-design er 14 % lengre. Resultatet er til gjengjeld svært likt det fra den tredimensjonale analysen i Ansys, se tabell 11.1, der den første egensvingeperioden var 11 % lengre enn den fra håndberegningen. NS 3491-12 krever ikke at det skal tas hensyn til andre ordens effekter i beregningene, og det gjøres ikke i FEM-Design versjon 8. I kapittel 8 og avsnitt

11.2 har vi derimot gjort det ved å benytte den kombinerte stivhetsmatrisen i beregningene selv om vi i avsnitt 11.2 neglisjerte duktilitetsfaktorens innflytelse på den geometriske stivhetsmatrisen. Forskjellene i lengden på den første egensvingeperioden kan likevel ikke forklares med andre ordens effekter fordi de bidrar til å øke egensvingeperioden. Avviket i forhold til resultatet fra Ansys må derfor ligge i forskjellige numeriske metoder og ulik inndeling av elementene i dataprogrammene. Den store forskjellen mellom resultatet fra håndberegningen og det fra FEM-Design skyldes derimot at det i den tredimensjonale analysen tas hensyn til deformasjonen til dekkene. I håndberegningene antok vi at disse var fullstendig stive. Figur 11.16 viser den første svingeformen slik den fremkommer i FEM-Design. Til venstre ses svingeformen i tre dimensjoner, i midten er et oppriss i y - z -planet og til høyre et oppriss i x - z -planet. Nøyaktig som i Ansys, se figur 11.1,



Figur 11.16: Egensvingeformen til den første moden i henhold til FEM-Design versjon 8 angir forskyvning i x -retning

ses det at dekkene deformeres vertikalt. Utslagene øker med etasjenummeret og med nærheten til vindkryssene i x -retning. Den første moden har likevel ingen effektiv modal masse i z -retning fordi den vertikale svingningen er antisymmetrisk. Argumentet finner vi fra ligning (3.37) som gjentas her:

$$m_k = \boldsymbol{\iota}^T \mathbf{s}_k = \boldsymbol{\iota}^T \frac{L_k}{M_k} \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_k. \quad (11.7)$$

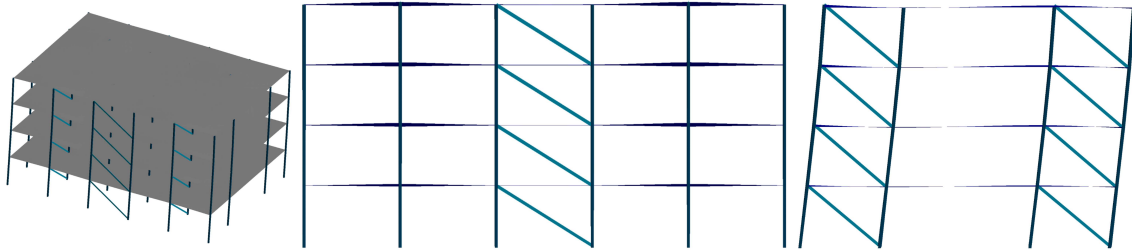
Den effektive modale massen i z -retning kommer fra frihetsgrader i z -retning. Vi ser derfor bort fra frihetsgradene i x - og y -retning, og husker på at $\boldsymbol{\iota}$ dermed kun består av ettall. Det betyr at ligning (11.7) kan forenkles til

$$m_k = \frac{L_k}{M_k} \sum_{j=1}^n m_j \phi_{jk}. \quad (11.8)$$

Dersom $m_r = m_s$ men $\phi_{rk} = -\phi_{sk}$ i ligning (11.8), blir summen av bidragene fra frihetsgrad r og s lik null. Det er tilfellet for moden som er vist i figur 11.16 siden konstruksjonen er dobbeltsymmetrisk og beveger seg oppover i akse 3 samtidig som den beveger seg nedover i akse 4. Derfor blir den effektive modale massen i vertikal retning lik null for denne moden.

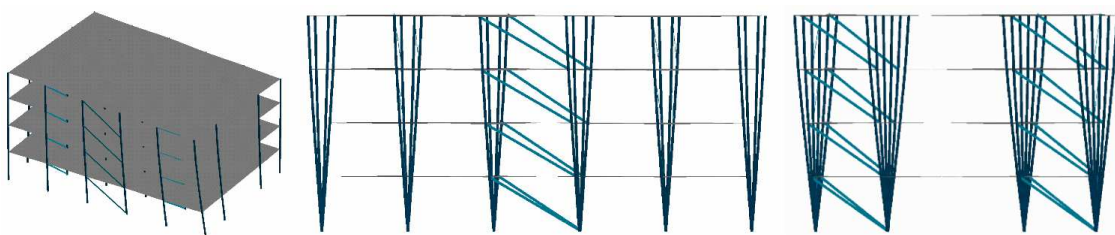
Tabell 11.4 angir at konstruksjonens andre mode har en naturlig svingeperiode på 0.773 sekunder, og at denne utelukkende foreskriver bevegelse i y -retning. I ligning (8.30) kom vi frem til at denne moden har en naturlig svingeperiode på 0.659 sekunder, så FEM-Design sitt resultat er 17 % lengre enn det fra håndberegningen. I Ansys er svingeperioden gitt som 0.7380 sekunder, se tabell 11.1. Der er 12 % lengre enn resultatet fra håndberegningen. For denne moden gir FEM-Design altså igjen en egensvingeperiode som er lengre enn den Ansys kommer frem til. Forskjellen er relativt stor, men årsaken kan ikke være andre ordens effekter siden de ville gitt motsatt utslag. Det kan være numeriske feil eller ulike beregningsmetoder, elementstørrelser og -typer som skaper

forskjellen. I figur 11.17, som viser den andre naturlige svingeformen i henhold til FEM-Design, ser vi at det også i denne formen er vertikale utslag, og at disse er størst i nærheten av vindkryssene i y -retning. Igjen er de antisymmetriske, konstruksjonen beveger seg oppover i akse B samtidig som den beveger seg nedover i akse C, og det medfører at moden ikke har effektiv modal masse i z -retning.



Figur 11.17: Egensvingeformen til den andre moden i henhold til FEM-Design versjon 8 angir forskyvning i y -retning

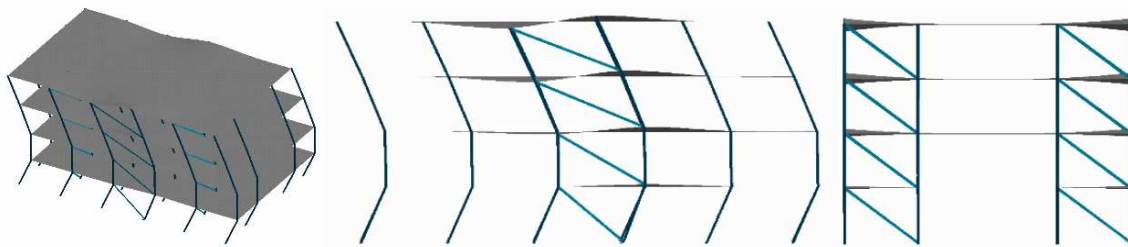
Den tredje moden har ifølge tabell 11.4 ingen effektiv modal masse. Forklaringen finner vi i figur 11.18 som viser svingeformen til denne moden i henhold til FEM-Design. Det er en torsjonsmode. Siden bygget er fullstendig dobbeltsymmetrisk skal en slik mode egentlig ikke eksistere. Tilfellet er det samme for den sjette og tolvte moden, se figur 11.21 og 11.27. Grunnen til at disse modene ikke har effektiv modal masse i noen retning er at rotasjon omkring en vertikal akse som går gjennom tyngdepunktet til en dobbeltsymmetrisk konstruksjon, tilsvarer antisymmetrisk svingning. Vi er altså tilbake ved argumentet under ligning (11.7). I tabell 11.4 er det gitt en neglisjerbar effektiv modal masse z -retning til den tolvte moden som skyldes numeriske avvik i analysen. Det bør legges merke til at Ansys fant fire torsjonsmoder, nemlig den tredje, åttende, tolvte og femtende moden. FEM-Design versjon 8 fant kun 3. Torsjonsmodene er tegn på numeriske feil, men etter som deres effektive modale masser er så små at de i praksis ikke påvirker resultatene, er de ikke i seg selv årsak til bekymring. Men de er en påminnelse om feilkildene i elementmetoden.



Figur 11.18: Egensvingeformen til den tredje moden i henhold til FEM-Design versjon 8 angir torsjon

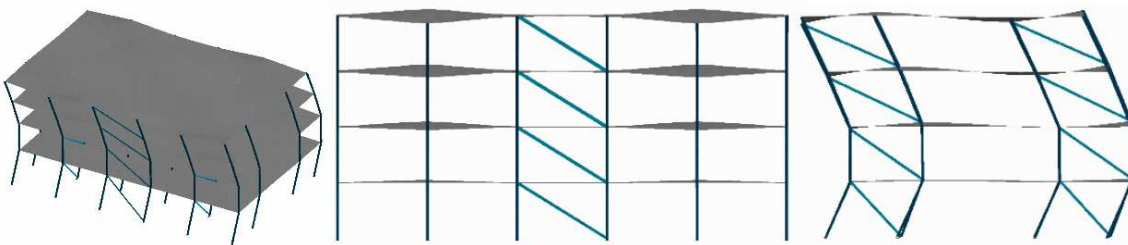
Den fjerde moden har ifølge tabell 11.4 en egensvingeperiode på 0.361 sekunder. Den har også kun effektiv modal masse i x -retning, og må derfor sammenliknes med den andre svingeformen i x -retning. Den har ifølge ligning (8.20) en egensvingeperiode på 0.323 sekunder. Egensvingeperioden fra FEM-Design versjon 8 er altså 12 % lengre enn den fra håndberegningen. For den første moden var forskjellen mellom håndberegningen og analysen i dette avsnittet 14 %. Som diskutert

ved figur 11.4, er det flere grunner til at differansen er mindre i den andre moden enn i den første. Tendensen bekreftes av den syvende og åttende moden som tilsvarer henholdsvis den tredje og fjerde moden i x -retning. Den tredje (syvende) er bare 2 % kortere i ligning (8.20) enn i tabell 11.4, og den fjerde (åttende) er lik i de to analysene. De naturlige svingeformene til mode 4, 7 og 8 er vist i figur 11.19, 11.22 og 11.23. Forskjellene mellom resultatene fra analysen i Ansys og håndberegningen var mindre enn forskjellen mellom FEM-Design versjon 8 og håndberegningen for de første tre modene. Siden egensvingeperiodene i henhold til FEM-Design versjon 8 for disse modene alle er lengre enn de fra både Ansys og håndberegningen kan det ikke være andre ordens effekter som ligger bak forskjellen. Det må derimot være forskjelle i programmenes numeriske metoder.

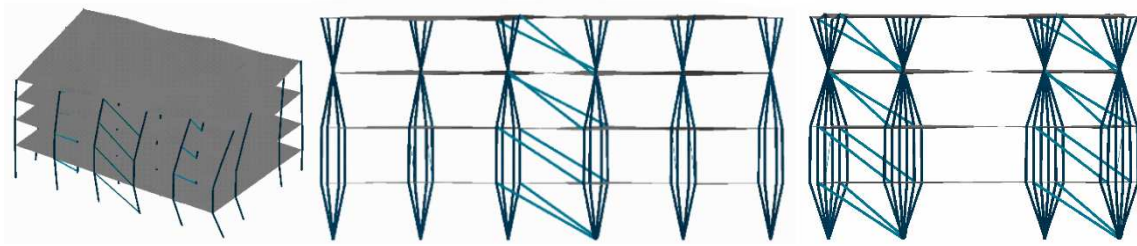


Figur 11.19: Egensvingeformen til den fjerde moden i henhold til FEM-Design versjon 8 angir forskyvning i x -retning

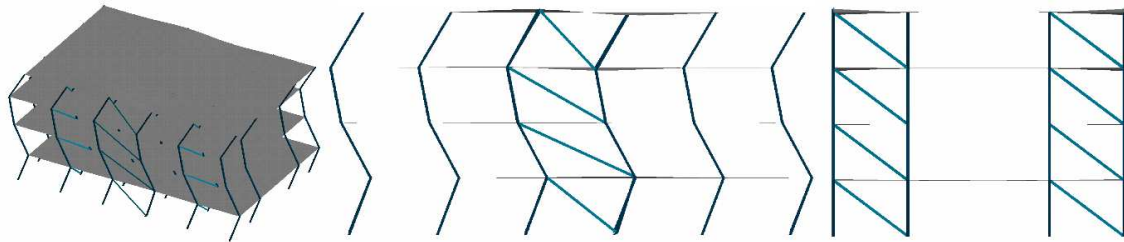
Den femte moden har ifølge tabell 11.4 en egensvingeperiode på 0.258 sekunder. Den har effektiv modal masse i y -retning, og vi må derfor sammenlikne den med den andre svingeformen i y -retning som ifølge ligning (8.30) har en egensvingeperiode på 0.229 sekunder. FEM-Design sitt resultat er altså 13 % lengre enn det fra håndberegningen. Som i x -retning, er forskjellen mindre for denne moden enn for den første, der den er på 17 %. Den ellevte moden har også effektiv modal masse i y -retning, og tilsvarer den tredje moden i ligning (8.30). Her er egensvingeperioden bare 2 % lengre i tabell 11.4 enn i håndberegningen. Svingeformene til mode 5 og 11 er vist i figur 11.20 og 11.26. Etter mode 11 er det kun vertikale moder, så den fjerde moden i y -retning kommer ikke frem i analysen. For analysen i Ansys var forskjellen i forhold til egensvingeperioden i håndberegningen henholdsvis 8 og 0.6 % for den andre og tredje moden i y -retning. Resultatene i Ansys er altså også i y -retning mer lik de fra håndberegningen enn det resultatene i dette avsnittet er.



Figur 11.20: Egensvingeformen til den femte moden i henhold til FEM-Design versjon 8 angir forskyvning i y -retning



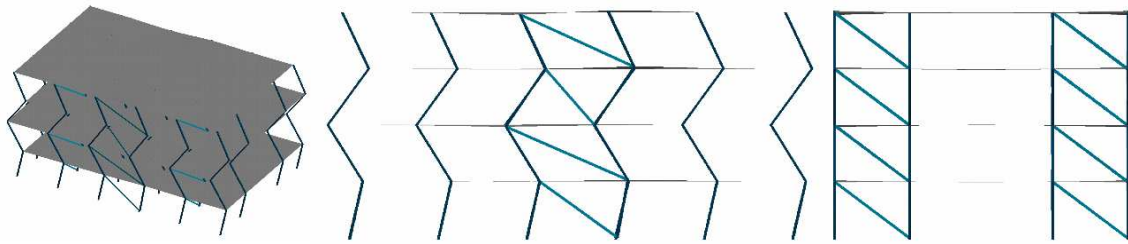
Figur 11.21: Egensvingeformen til den sjette moden i henhold til FEM-Design versjon 8 angir torsjon



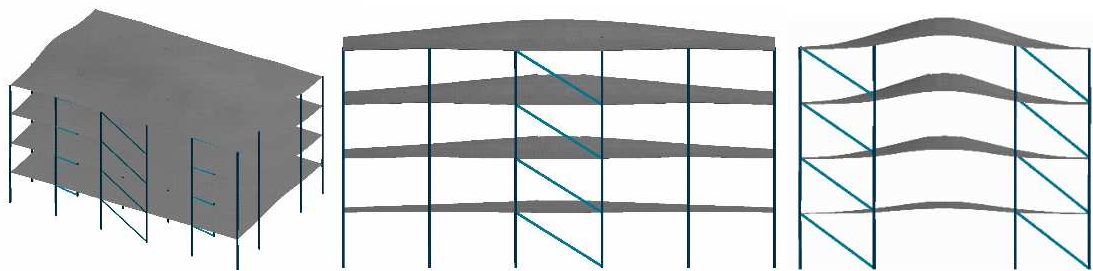
Figur 11.22: Egensvingeformen til den syvende moden i henhold til FEM-Design versjon 8 angir forskyvning i x -retning

Den niende moden er den første som angir effektiv modal masse i z -retning. Vi ser at den tilhørende egensvingeperioden er på 0.168 sekunder. Moden tilhører altså det akselerasjonsensitive området av responsspektret, se ligning (8.38) og figur 5.14. Likevel er det ikke sannsynlig at den vil gi laster av stor betydning for søylene siden de også skal dimensjoneres for vertikale laster i bruddgrensetilstand. Den naturlige svingeformen til mode 9 er vist i figur 11.24. Det ses at den kun foreskriver bevegelse i z -retning, og det er grunnen til at den ikke har effektiv modal masse i de horisontale retningene. Tilfellet er det samme for den fjortende og femtende moden som ifølge tabell 11.4 har en liten effektiv modal masse i z -retning, se figur 11.29 og 11.30.

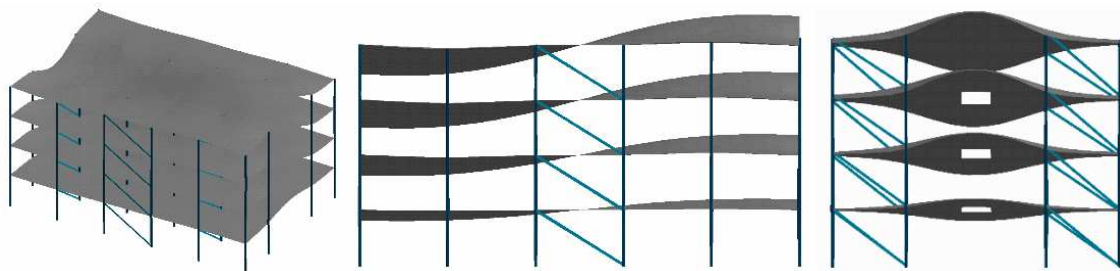
Den tiende moden har ingen effektiv modal masse i noen hovedretning. Årsaken finnes i figur 11.25 som viser den tilhørende naturlige svingeformen. Her ser vi at den kun foreskriver bevegelse i z -retning, og at denne er antisymmetrisk. Heller ikke den trettende moden har effektiv modal masse i noen hovedretning. Igjen finnes forklaringen i svingeformen som er vist i figur 11.28. Moden gir ingen horisontal svingning, og de vertikale forskyvningene virker oppover og nedover samtidig. Moden er ikke antisymmetrisk, men de motsatt rettede bevegelsene medfører likevel at den ikke har effektiv modal masse fordi dekkens masse er konstant. Hadde vekten i akse 1 vært forskjellig fra den i akse 6 ville moder som nummer 10 og 13, derimot hatt effektiv modal masse i z -retning.



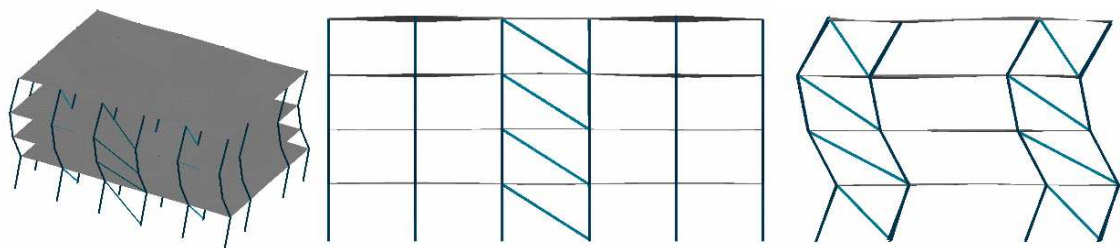
Figur 11.23: Egensvingeformen til den åttende moden i henhold til FEM-Design versjon 8 angir forskyvning i x -retning



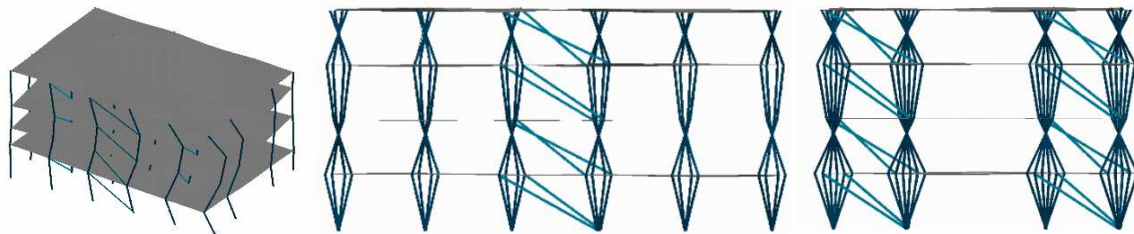
Figur 11.24: Egensvingeformen til den niende moden i henhold til FEM-Design versjon 8 angir vertikal forskyvning



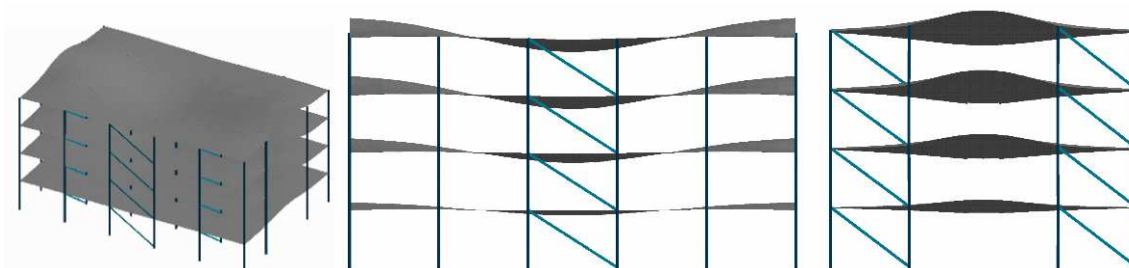
Figur 11.25: Egensvingeformen til den tiende moden i henhold til FEM-Design versjon 8. Moden har ingen effektiv modal masse fordi den vertikale deformasjonen er antisymmetrisk



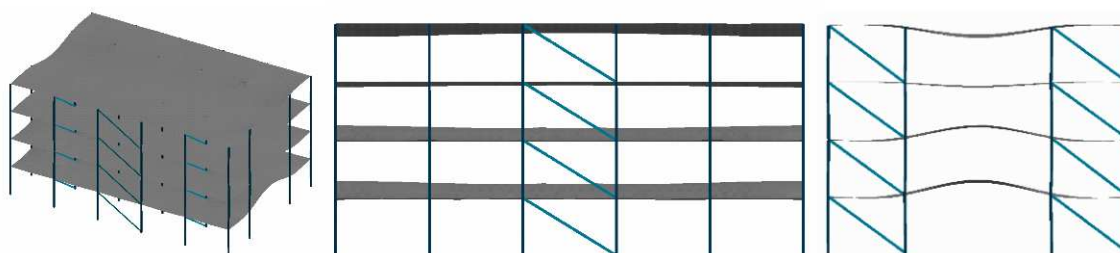
Figur 11.26: Egensvingeformen til den ellefte moden i henhold til FEM-Design versjon 8 angir forskyvning i y -retning



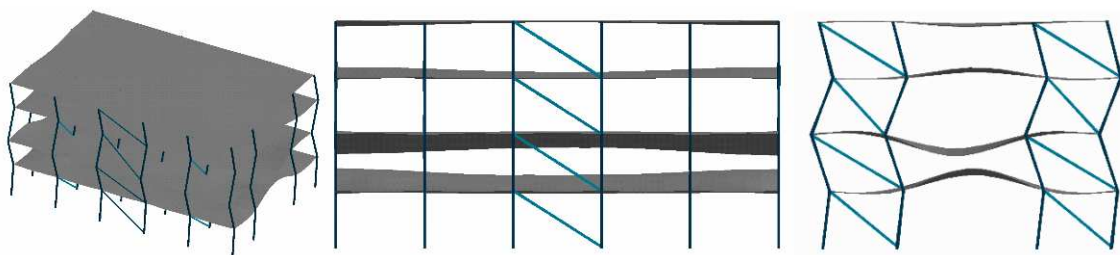
Figur 11.27: Egensvingeformen til den tolvte moden i henhold til FEM-Design versjon 8 angir torsjon



Figur 11.28: Egensvingeformen til den trettende moden i henhold til FEM-Design versjon 8 angir vertikal forskyvning



Figur 11.29: Egensvingeformen til den fjortende moden i henhold til FEM-Design versjon 8 angir vertikal forskyvning



Figur 11.30: Egensvingeformen til den femtende moden i henhold til FEM-Design versjon 8 angir vertikal forskyvning

Nå som modenenes egenskaper er gjennomgått, går vi videre til å se på lastvirkningene. Den maksimale horisontallasten i vindkryssene i x -retning finnes ved komplett kvadratisk kombinasjon av de første femten moder. Resultatet er

$$\mathbf{H}_{vk,x} = \begin{bmatrix} 77 \\ 111 \\ 134 \\ 166 \end{bmatrix} kN. \quad (11.9)$$

Kreftene i ligning (11.9) er mindre enn de i ligning (8.68) for alle etasjene. Forskjellen er på henholdsvis 3, 13, 17 og 12 % i fjerde, tredje, andre og første etasje. Forskjellen i resultatene er altså relativt stor i de tre nederste etasjene, men ikke i den øverste. Den totale skjærkraften i hver etasje kommer frem ved å doble resultatet i ligning (11.9), og avvikene i forhold til resultatet i avsnitt 8.3 tilsvarende avvikene for horisontallasten i hvert vindkryss.

Den maksimale horisontallasten i vindkryssene i y -retning blir

$$\mathbf{H}_{vk,y} = \begin{bmatrix} 53 \\ 79 \\ 96 \\ 120 \end{bmatrix} kN. \quad (11.10)$$

Resultatet i ligning (11.10) er mindre enn det i ligning (8.88) for alle etasjene. Forskjellen er på henholdsvis 1, 12, 16 og 10 % i fjerde, tredje, andre og første etasje. Som i x -retning, er forskjellen i resultatene altså relativt stor i de tre nederste etasjene, men ikke i den øverste. Det vil si at det fremkommer forholdsvis store avvik mellom resultatene fra FEM-design versjon 8 og de fra håndberegningen for vindkryssene i både x - og y -retning, og lastene er i alle tilfellene minst i henhold til FEM-Design. Det skyldes at den tredimensjonale analysen gir lengre egensvingeperioder enn de vi fant ved håndberegning. Konstruksjonens første moder tilhører det hastighetsensitive området av responsspektret, og lengre egensvingeperiode tilsvarende derfor mindre last. Årsaken til at avviket er minst i den øverste etasjen er at resultatet her er mer avhengig av de høyere modenene enn det kreftene i de lavere etasjene er. Vi så tidligere i dette avsnittet at forskjellen mellom egensvingeperiodene fra de to analysemetodene er mindre for de høyere modenene.

Det er interessant at avviket mellom håndregnemethoden og resultatene fra FEM-Design versjon 8 generelt er mindre i y - enn i x -retning. Årsaken til dette kan finnes to steder. For det første er differansen mellom egensvingeperiodene, som vi diskuterte ovenfor, mindre i y - enn i x -retning fordi konstruksjonen er stivere i y -retning. For det andre blir vindkryssene i y -retning påvirket av vertikal grunnakselerasjon i mye større grad enn vindkryssene i x -retning. Mode 9 er den eneste moden med signifikant effektiv modal masse i z -retning, og det kommer frem av figur 11.24 at denne moden påvirker vindkryssene i y -retning men ikke de i x -retning. Den vertikale grunnakselerasjonen øker altså lastvirkningene på vindkryssene i y -retning, og siden disse fra før er mindre enn resultatet fra håndberegningen gir det en reduksjon i avviket mellom de to analysene.

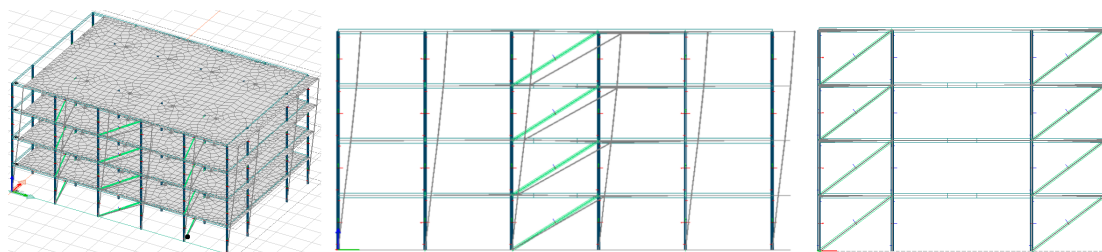
Lastene fra den tredimensjonale analysen i Ansys er konsekvent større enn de vi kommer frem til i dette avsnittet. Det er vanskelig å finne årsaken siden det er flere forskjeller på analysene. Det er benyttet stivere men mindre elementer i dette avsnittet, og det tas hensyn til andre ordens virkninger i Ansys men ikke i versjon 8 av FEM-Design. Løsningsprosedyren i de to programmene er også forskjellig.

11.5 FEM-Design og NS-EN 1998-1

Brukergrensesnittet til FEM-Design versjon 9 er svært lik det til versjon 8, men det er litt flere valgmuligheter i den nyeste versjonen. Det skyldes både en generell utvikling av programmet og at eurokoden stiller mer avanserte krav enn NS 3491-12. En viktig forskjell er at det i den nye versjonen av programmet er mulig å definere stag som ikke er vertikale, og derfor kan vi bruke den “fine” elementtypen, se avsnitt 11.5. Det kan tas hensyn til utilsiktet eksentrisitet og andre ordens effekter ved hjelp av tilnærmede metoder. Siden ligning (8.109) kun er gyldig for dobbeltsymmetriske bygg benytter FEM-Design versjon 9 i stedet en metode der det legges inn torsjonsmomenter [42, 46]. Også med hensyn på andre ordens effekter benyttes det en annen metode enn vi hittil har gjort. I stedet for å benytte den kombinerte stivhetsmatrisen multipliseres resultatene med en forstørrelsesfaktor som avhenger av forskyvningen mellom etasjene, den vertikale og horisontale lasten samt etasjehøyden [42, 47]. Som i versjon 8, er det lagt til rette for å ta hensyn til grunnakselerasjonens vertikale komponent, og det benytter vi i beregningen. Responsspektret til den vertikale grunnakselerasjonen er i eurokoden gitt som den horisontale, se ligning (8.89), med a_g erstattet av $a_{vg} = 0.6 a_g$. De øvrige parametrene er $S = 1.0$, $T_B = 0.05 s$, $T_C = 0.20 s$, $T_D = 1.2 s$, $\beta = 0.2$ og $q = 1.5$. Som i NS 3491-12, varierer forsterkningsfaktoren altså ikke med grunnforholdene når grunnakselerasjonen er vertikal. Konstruksjonsfaktoren q kan kun velges som større enn 1.5, hvis det utføres en særlig analyse av denne. Det tas altså hensyn til at bygg vanligvis har stor styrke og stivhet vertikalt og derfor vil forbli tilnærmet elastiske i z -retning under et jordskjelv.

Egensvingeperiodene og de effektive modale massene til de første femten modene er vist i tabell 11.5. Sammenliknet med resultatet i versjon 8, se tabell 11.4, ser vi at versjon 9 generelt gir litt kortere egensvingeperioder, og at den effektive modale massen er mindre i den første moden i både x - og y -retning men til gjengjeld større for den andre moden i hver hovedretning. Det er brukt “standard”-elementer i analysen i versjon 8 og “fine” elementer i versjon 9. Dårlige elementer innfører stivhet som korter ned egensvingeperiodene, så egensvingeperiodene vi kom frem til i versjon 8 burde vært kortere enn de i versjon 9. Metoden som benyttes i beregningen, er altså forskjellig i versjon 8 og 9. De naturlige svingeperiodene i tabell 11.5 ligner mer på resultatene fra Ansys og håndberegningen, se tabell 11.1 samt ligning (8.20) og (8.30). Det er en indikasjon på at FEM-Design versjon 9 beregner egensvingeperioder mer korrekt enn FEM-Design versjon 8.

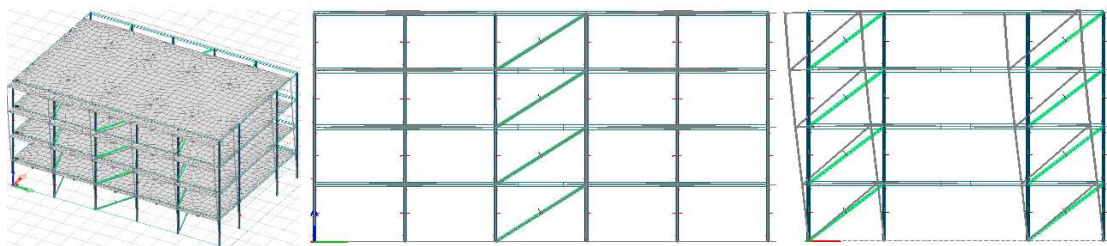
De første femten svingeformene er vist i figur 11.31 til 11.45. Som tidligere vises svingeformene



Figur 11.31: Egensvingeformen til den første moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir forskyvning i x -retning

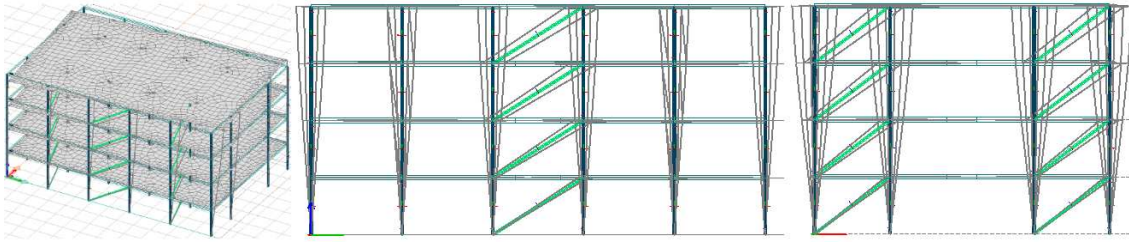
Tabell 11.5: De første 15 modenenes naturlige svingeperioder og effektive modale masser for bygget i figur 7.1 beregnet i FEM-Design versjon 9. De effektive modale massene er angitt i prosent av den totale massen til bygget

k	T	m_{kx}	m_{ky}	m_{kz}
	s	%	%	%
1	1.034	85.1	0.0	0.0
2	0.739	0.0	84.8	0.0
3	0.669	0.0	0.0	0.0
4	0.347	11.9	0.0	0.0
5	0.247	0.0	12.1	0.0
6	0.225	0.0	0.0	0.0
7	0.212	2.3	0.0	0.0
8	0.172	0.0	0.0	0.0
9	0.160	0.0	0.0	56.8
10	0.150	0.0	2.4	0.0
11	0.148	0.0	0.0	0.0
12	0.138	0.0	0.0	0.0
13	0.132	0.0	0.0	3.6
14	0.121	0.0	0.0	0.0
15	0.114	0.0	0.0	1.8

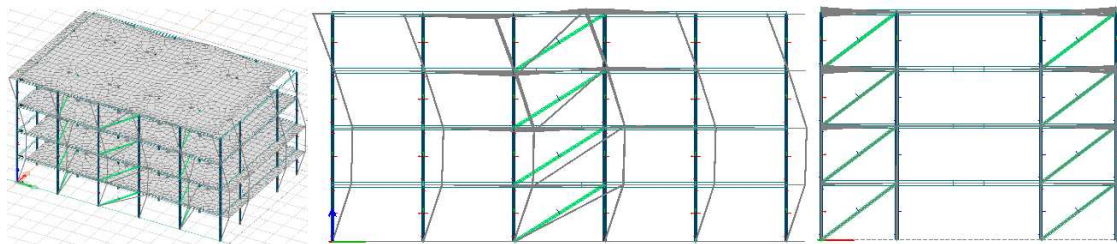


Figur 11.32: Egensvingeformen til den andre moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir forskyvning i y -retning

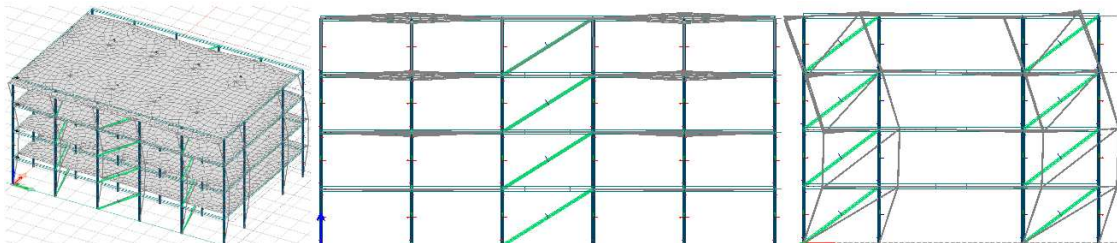
i 3D samt oppriss i x - og y -retning. I motsetning til figurene fra FEM-Design versjon 8 (se figur 11.16 til 11.30), er både den udeformerte geometrien og elementnettet vist. Det medfører at særlig den tredimensjonale figuren er tydeligere.



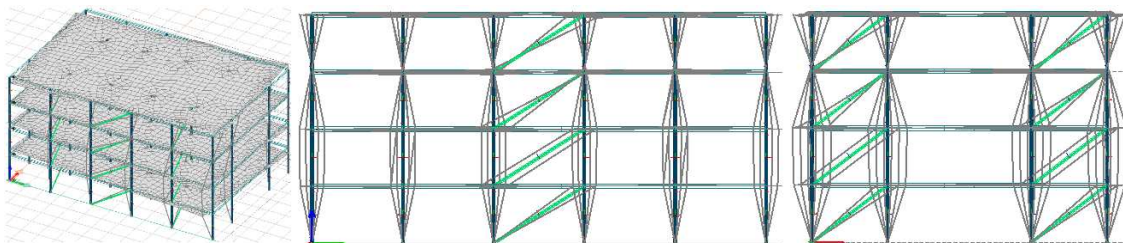
Figur 11.33: Egensvingeformen til den tredje moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir torsjon



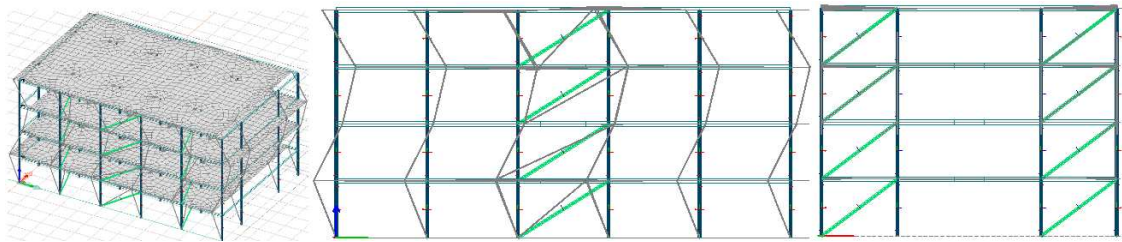
Figur 11.34: Egensvingeformen til den fjerde moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir forskyvning i x -retning



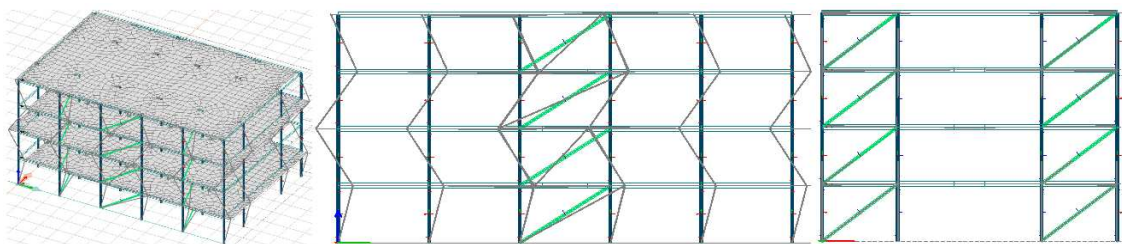
Figur 11.35: Egensvingeformen til den femte moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir forskyvning i y -retning



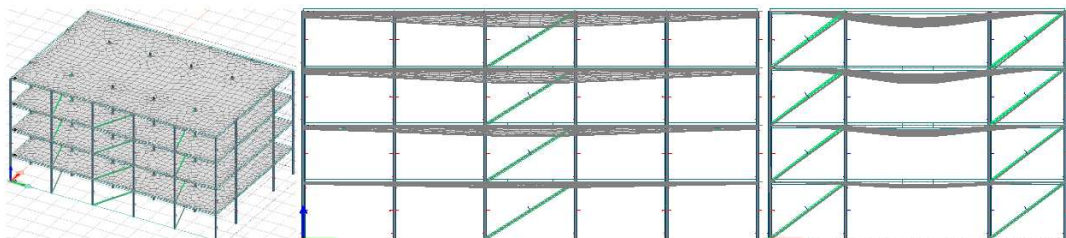
Figur 11.36: Egensvingeformen til den sjette moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir torsjon



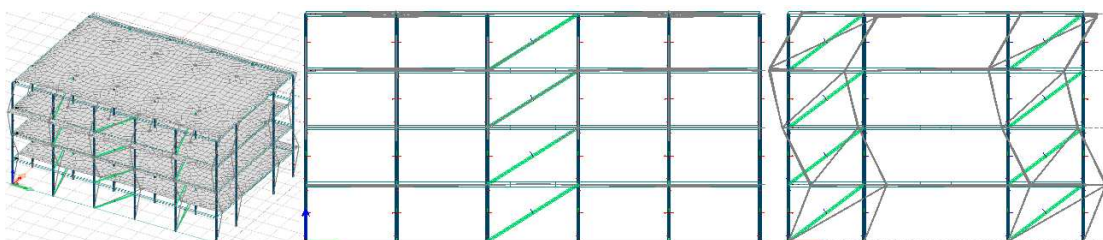
Figur 11.37: Egensvingeformen til den syvende moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir forskyvning i x -retning



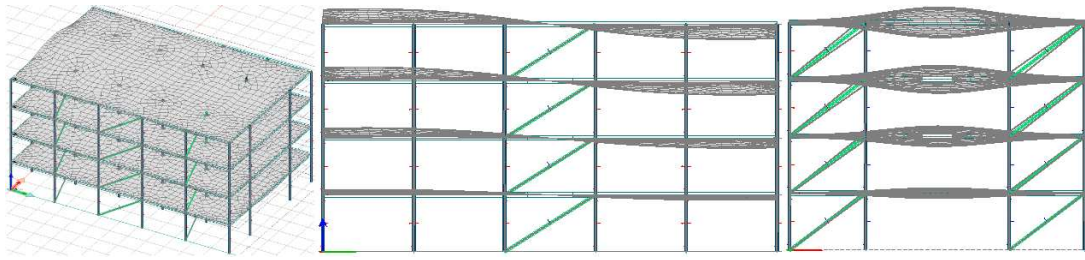
Figur 11.38: Egensvingeformen til den åttende moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir forskyvning i x -retning



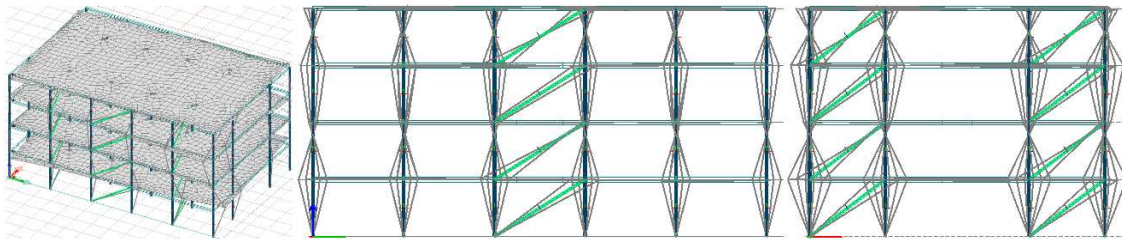
Figur 11.39: Egensvingeformen til den niende moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir vertikal forskyvning



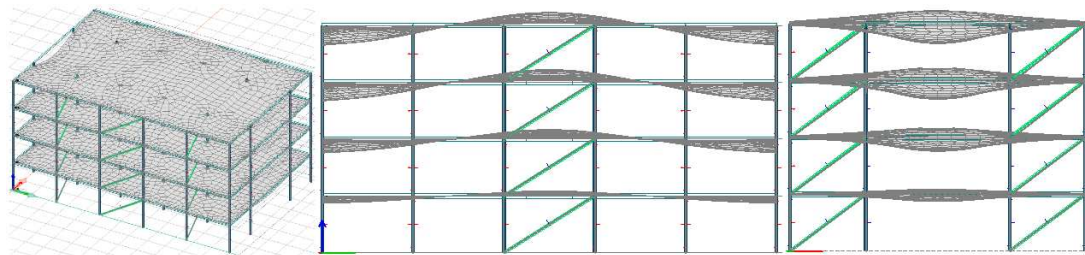
Figur 11.40: Egensvingeformen til den tiende moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir forskyvning i y -retning



Figur 11.41: Egensvingeformen til den ellevte moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir vertikal forskyvning, men siden deformasjonen er antisymmetrisk er den effektive modale massen lik null



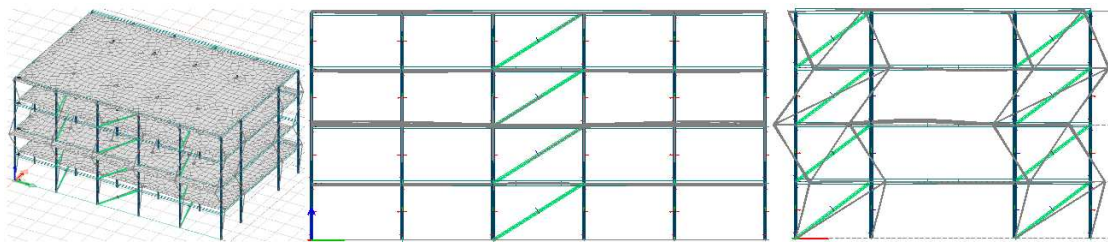
Figur 11.42: Egensvingeformen til den tolvte moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir torsjon



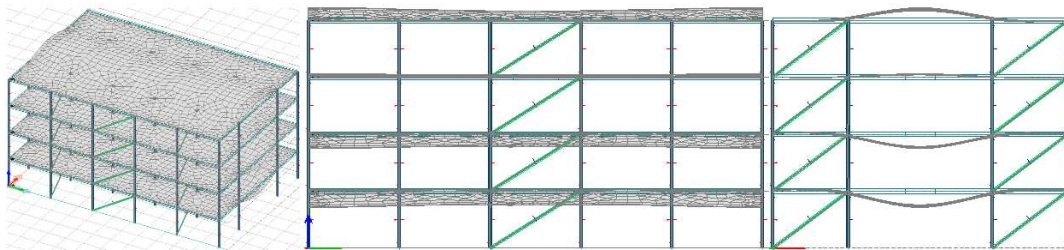
Figur 11.43: Egensvingeformen til den trettende moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir vertikal forskyvning, men den effektive modale massen er lik null

Her ser vi at den første, fjerde, syvende og åttende moden tilvarer de første fire modene i x -retning. På samme vis tilsvarende mode to, fem, ti og fjorten de første fire modene i y -retning. Mode tre, seks og tolv er torsjonsmoder. Den niende moden angir vertikal svingning, nøyaktig som i FEM-Design versjon 8, se figur 11.24. Den ellevte svingeformen er også vertikal, men antisymmetrisk. Den har derfor ingen effektiv modal masse. I den trettende og femtende moden sviger bygget også vertikalt uten effektiv modal masse. Formen er ikke antisymmetrisk, men tilnærmet like mye masse forskyves oppover som nedover, og derfor har moden nesten ingen effektiv modal masse.

De første ni modene har altså tilnærmet samme svingeform i henhold til versjon 8 og 9 av programmet. Først ved den tiende moden er svingeformen markant annerledes, siden denne i hht. versjon 8 er vertikal og antisymmetrisk, mens den i versjon 9 er den tredje svingeformen i y -retning.



Figur 11.44: Egensvingeformen til den fjortende moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir forskyvning i y -retning



Figur 11.45: Egensvingeformen til den femtende moden i henhold til FEM-Design versjon 9. Det ses at denne moden angir vertikal forskyvning

Den maksimale horisontallasten i vindkryssene i x -retning blir

$$\mathbf{H}_{vk,x} = \begin{bmatrix} 83 \\ 119 \\ 145 \\ 173 \end{bmatrix} kN. \quad (11.11)$$

Sammenliknet med resultatet i henhold til NS 3491-12, som er gitt i ligning (11.9), er lastvirkningene i ligning (11.11) litt større i alle etasjene. Dette er den første analysen i henhold til eurokoden som gir tilnærmet samme resultater som analysen i henhold til NS 3491-12. Årsaken må være at FEM-Design tar hensyn til utilsiktet eksentrisitet på en annen måte enn vi har gjort i de tidligere avsnittene.

I forhold til resultatene fra håndberegningen i ligning (8.111) er lastvirkningene i ligning (11.11) henholdsvis 31, 39, 41 og 40 % mindre i fjerde, tredje, andre og første etasje. Den store forskjellen skyldes hovedsaklig utilsiktet eksentrisitet som påvirker lastvirkningene i alle etasjene. Det at den effektive modale massen er større for de høyere modene i dette avsnittet medfører at lastene blir mindre i de nederste etasjene og forholdsvis større i de øverste. Derfor er forskjellen mellom ligning (8.111) og (11.11) ikke lik i de fire etasjene.

Den maksimale horisontallasten i vindkryssene i y -retning blir

$$\mathbf{H}_{vk,y} = \begin{bmatrix} 63 \\ 91 \\ 111 \\ 132 \end{bmatrix} kN. \quad (11.12)$$

Når vi sammenlikner disse lastvirkningene med resultatet i ligning (11.10) ser vi at lastene i henhold til eurokoden er større i alle etasjene. I forhold til resultatene vi kom frem til i håndberegningen, se ligning (8.129), ser vi at lastvirkningene i ligning (11.12) er mindre i alle etasjene. Forskjellen er på henholdsvis 23, 33, 36 og 35 % i fjerde, tredje, andre og første etasje, og skyldes de samme faktorene som i x -retning.

Som i avsnitt 11.4, er forskjellen mellom resultatene i den tredimensjonale analysen og håndberegningene mindre i y - enn i x -retning. Det er to årsaker til dette. For det første er systemet stivere i y - enn i x -retning, og for det andre påvirkes vindkryssene i y -retning i stor grad av dekkens vertikale svingninger. Mode ni, tretten og femten gir altså et tillegg til lasten i vindkryssene i y -retning som jevner ut forskjellene mellom resultatene i denne analysen og håndberegningen.

11.6 Sammenlikning og diskusjon

Vi har allerede diskutert resultatene inngående, men i dette avsnittet setter vi opp tabeller som gjør det enklere å se forskjellene. Den første parameteren vi ser nærmere på er lastvirkningenes størrelse i forhold til resultatene vi kom frem til i kapittel 8. Disse er vist i tabell 11.6, der resultatene fra dette kapitlet er sammenliknet med de tilsvarende resultatene i kapittel 8. Lastvirkningene i avsnitt

Tabell 11.6: Forskjellene mellom resultatene fra dette kapitlet og de fra kapittel 8. Differansen er angitt i prosent, og negativ verdi betyr at metoden i dette kapitlet gir minst respons

Etasje	Ansys				FEM-Design			
	NS 3491-12		NS-EN 1998-1		NS 3491-12		NS-EN 1998-1	
	x -retn.	y -retn.	x -retn.	y -retn.	x -retn.	y -retn.	x -retn.	y -retn.
4	0.5	3	-18	-16	-3	-2	-31	-23
3	-7	-7	-24	-24	-13	-12	-39	-33
2	-9	-10	-26	-27	-17	-16	-41	-36
1	-7	-7	-24	-24	-12	-10	-40	-35

11.2 er for eksempel sammenliknet med ligning (8.68) og (8.88). Den tydeligste tendensen er at lastvirkningene i henhold til eurokoden er langt mindre i de tredimensjonale analysene enn i håndberegningen. Den store forskjellen skyldes at tillegget for utilsiktet eksentrisitet er mindre i den tredimensjonale analysen. En annen tendens er at resultatene fra Ansys er mer lik de fra håndberegningen enn resultatene fra FEM-Design er. Det eneste avviket fra den tendensen er skjærkraften i begge hovedretninger i den øverste etasjen i henhold til NS 3491-12. Tabell 11.7 viser horisontallasten som må tas opp i hvert vindkryss, i henhold til resultatene fra hver av analysene i dette kapitlet. Her ser vi at FEM-Design versjon 8 og 9 konsekvent gir mindre lastvirkninger enn Ansys.

En annen interessant ting i tabell 11.6, er at forskjellen mellom resultatene i Ansys og de i håndberegningen er nesten lik i x - og y -retning. Forskjellene er derimot markant mindre i y - enn i x -retning når analysene i FEM-Design sammenliknes med håndberegningen. Et argument mot

Tabell 11.7: Horisontallasten i hvert vindkryss i henhold til resultatene fra dette kapitlet. Kraften er angitt i kN

Etasje	Ansys				FEM-Design			
	NS 3491-12		NS-EN 1998-1		NS 3491-12		NS-EN 1998-1	
	<i>x</i> -retn.	<i>y</i> -retn.	<i>x</i> -retn.	<i>y</i> -retn.	<i>x</i> -retn.	<i>y</i> -retn.	<i>x</i> -retn.	<i>y</i> -retn.
4	79	56	98	68	77	53	83	63
3	118	83	147	103	111	79	119	91
2	147	103	182	127	134	96	145	111
1	177	124	219	154	166	120	173	132

dette ses i tabell 11.8 og 11.9 som viser de fire første egensvingeperiodene i henholdsvis *x*- og *y*-retning fra hver analyse. I tabell 11.8 er disse gitt i sekunder mens de i 11.9 er normalisert i forhold til håndberegningen. Det kommer frem at egensvingeperiodene generelt er mer forskjellige i *y*- enn i *x*-retning. De tredimensjonale analysene gir konsekvent lengre egensvingeperioder enn håndberegningen, og siden de første modene tilhører det hastighetsensitive området i designspektret er det ensbetydende med mindre lastvirkninger. Altså blir lastvirkningene mindre i de tredimensjonale analysene enn i håndberegningen, en tendens som kommer tydelig frem i tabell 11.6. Men siden forskjellen i egensvingeperiodene er større i *y*- enn i *x*-retning skulle forskjellen mellom 3D-analysene og håndberegningen vært størst i *y*-retning, hvilket den ikke er. Den er derimot nesten lik i henhold til Ansys og mindre i henhold til FEM-Design. Årsaken er at vindkryssene i *y*-retning påvirkes av vertikale svingninger i større grad enn vindkryssene i *x*-retning. Svingeformene i figur 11.9, 11.24 og 11.39 har alle en relativt stor effektiv modal masse i *z*-retning, og de gir alle krefter i vindkryssene i *y*-retning mens vindkryssene i *x*-retning stort sett ikke påvirkes. Lastvirkningene fra de tredimensjonale analysene er generelt mindre enn lastvirkningene fra håndberegningene, og tillegget fra de vertikale svingningene bidrar til å jevne ut forskjellen. Men i analysene vi har gjort

Tabell 11.8: De første fire egensvingeperiodene i henholdsvis *x*- og *y*-retning fra håndberegningen i avsnitt 8.2, Ansys i avsnitt 11.2 og 11.3, FEM-Design versjon 8 i 11.4 og FEM-Design versjon 9 i 11.5. FEM-Design versjon 8 fant ikke den fjerde moden i *y*-retning blant de 15 første modene. De naturlige svingeperiodene er gitt i sekunder

Mode	Hånd-beregning	Ansys	FEM-Design versjon 8	FEM-Design versjon 9
<i>x</i>-retning				
1	0.929	1.0412	1.079	1.034
2	0.322	0.3487	0.361	0.347
3	0.211	0.2138	0.217	0.212
4	0.172	0.1726	0.173	0.172
<i>y</i>-retning				
1	0.657	0.7380	0.773	0.739
2	0.228	0.2470	0.258	0.247
3	0.150	0.1508	0.153	0.150
4	0.122	0.1213	-	0.121

i Ansys tar vi ikke hensyn til vertikal grunnakselerasjon, og denne effekten blir derfor ikke medtatt i resultatene. Derfor er forskjellen mellom resultatene fra Ansys og håndberegningen nesten like i x - og y -retning. I FEM-Design bidrar den vertikale grunnakselerasjonen derimot til å øke lastvirkningene i vindkryssene i y -retning mer enn i x -retning, og dermed blir forskjellen mindre her.

Tabell 11.9: De første fire egensvingeperiodene i henholdsvis x - og y -retning fra dette kapitlet normalisert i forhold til resultatet fra håndberegningen i avsnitt

Mode	Hånd- beregning	Ansys	FEM-Design versjon 8	FEM-Design versjon 9
x-retning				
1	1.000	1.121	1.161	1.113
2	1.000	1.083	1.121	1.078
3	1.000	1.013	1.028	1.005
4	1.000	1.003	1.006	1.000
y-retning				
1	1.000	1.123	1.177	1.125
2	1.000	1.083	1.132	1.083
3	1.000	1.005	1.020	1.000
4	1.000	0.994	-	0.992

En annen ting som kommer tydelig frem i tabell 11.9, er at egensvingeperiodene konsekvent er lengst i henhold til FEM-Design versjon 8. Det er bemerkelsesverdig fordi det i denne 3D-analysen ble benyttet stivere elementer enn i de andre. Forklaringen må ligge i beregningsmetoden.

Helt til slutt må det kommenteres at egensvingeperiodene fra håndberegningen og de tredimensjonale analysene er mer like for de høyere modene enn for de første. I y -retning er den fjerde egensvingeperioden faktisk lengre i henhold til håndberegningen enn i henhold til Ansys og FEM-Design, se tabell 11.9. Årsaken til dette er at vertikale deformasjoner har større betydning for de høyere modene, og siden det ikke er noen vertikale frihetsgrader i håndberegningen er denne effekten ikke medtatt i avsnitt 8.2.

Kapittel 12

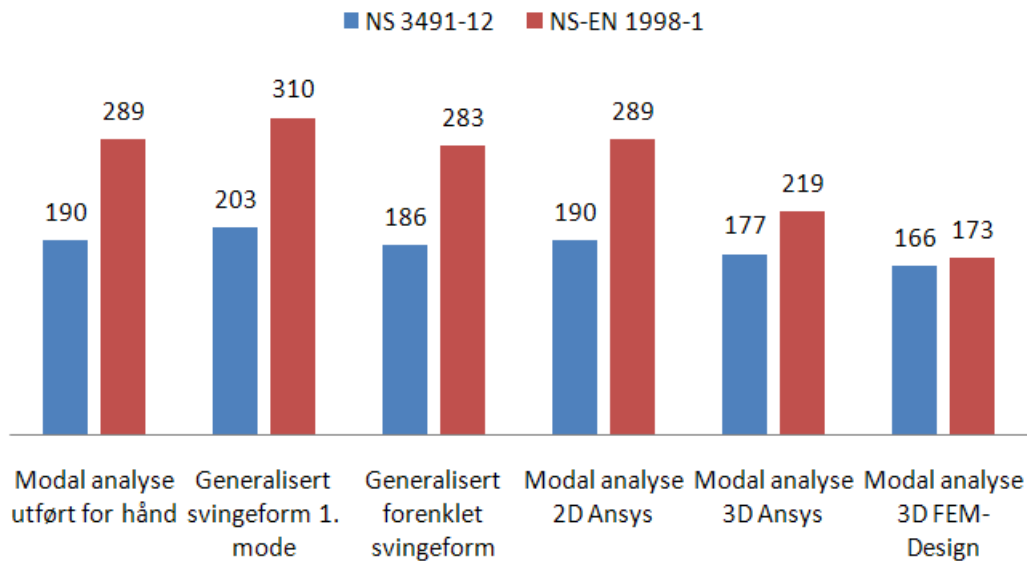
Oppsummering av hoveddel II

I denne hoveddelen av oppgaven er det presentert og sammenliknet mange resultater. Vi har blitt kjent med to regelverk gjennom seks forskjellige analysemetoder. I tillegg har vi i hvert avsnitt beregnet flere forskjellige lastvirkninger. Vi har diskutert resultatene inngående i hvert kapittel, og skal ikke gjenta diskusjonen her. Derimot er det ønskelig med en enkel oversikt over tendensene vi har kommet frem til. Det gis her gjennom diagrammer som viser resultatene for den horisontale kraften i vindkryssene i øverste og nederste etasje i henhold til begge regelverk. Disse responsparametrene er valgt fordi de er beregnet med alle seks analysemetoder, og dermed gir et bilde av trender for både regelverk og beregningsmetode.

Resultatene fra avsnitt 8.5 er ikke medtatt siden inngangsparametrene her avviker fra de i resten av kapitlet. Det er derfor ikke mer interessant å sammenlikne disse med lastvirkningene i kapittel 9, 10 og 11 enn med de i avsnitt 8.3 og 8.4. En slik sammenlikning er allerede gjennomført i avsnitt 8.5.

Diagrammene i figur 12.1, 12.2, 12.3 og 12.4 viser horisontallasten i de øverste og nederste vindkryssene i x - og y -retning. Kreftene er tatt fra ligning (8.68), (8.88), (8.111), (8.129), (9.7), (9.11), (9.26), (9.33), (9.41), (9.46), (9.53), (9.59), (10.12), (10.18), (10.21), (10.23), (11.3), (11.4), (11.5), (11.6), (11.9), (11.10), (11.11) og (11.12). Det ses at eurokoden gir større lastvirkninger enn NS 3491-12 i alle analysene, men differansen er liten for de tredimensjonale systemene. Forskjellen skyldes tillegget for utilsiktet eksentrisitet, og vi kan herav konkludere at det gir ekstremt store utslag for todimensjonale analyser.

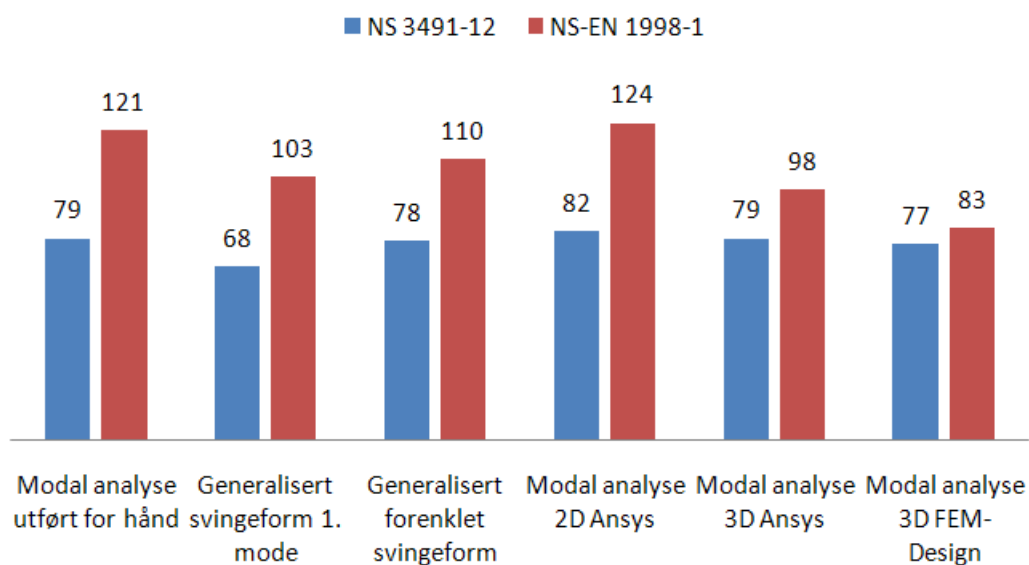
En annen ting som kommer frem av diagrammene, er at resultatene i henhold til eurokoden varierer mer enn resultatene i henhold til NS 3491-12. Sammenlikner vi f. eks. lastvirkningene fra den tredimensjonale analysen i Ansys med de fra FEM-Design er forskjellen i alle diagrammene minst for NS 3491-12. Tendensen er tydelig i figur 12.1, 12.2 og 12.3. For vindkryssene i fjerde etasje i y -retning (figur 12.4) er forholdet også størst i henhold til eurokoden, men differansen er liten. Det skyldes følgende:



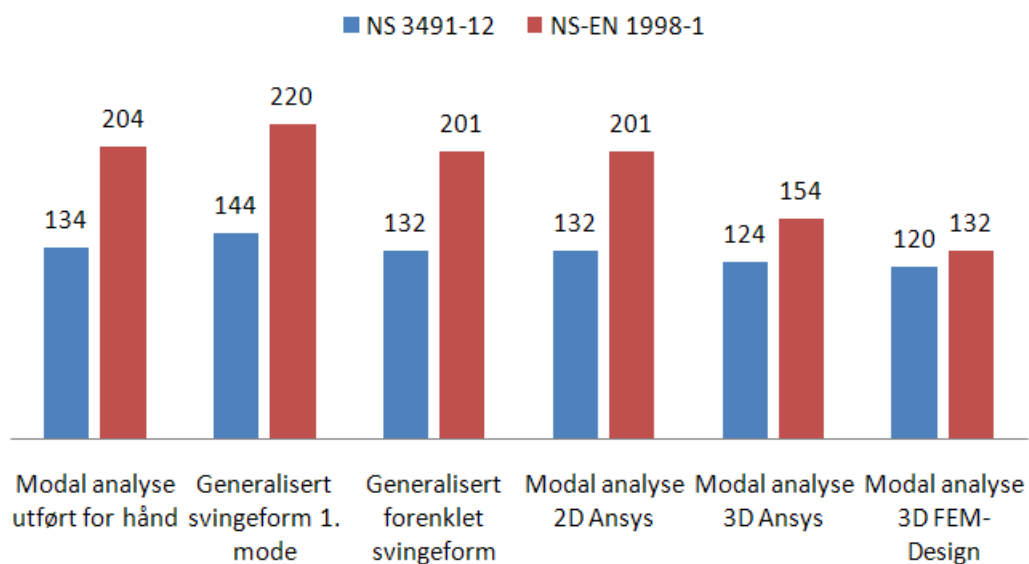
Figur 12.1: Horisontallasten i hvert vindkryss i x -retning i nederste etasje beregnet med forskjellige analysemetoder. Kraftene er gitt i kN og tatt fra avsnitt 8.3, 8.4, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5, 10.2, 10.3, 11.2, 11.3, 11.4 og 11.5. Lastvirkningene er diskutert utførlig i kapitlene der de er beregnet

- De tredimensjonale analysene gir konsekvent større lastvirkninger enn analysene i FEM-Design
- Vindkryssene i y -retning påvirkes i relativt stor grad av vertikal grunnakselerasjon. Den effekten er særlig viktig i de øverste etasjene
- Det er kun tatt hensyn til vertikal grunnakselerasjon i analysene i FEM-Design. I alle de øvrige analysene er denne neglisert

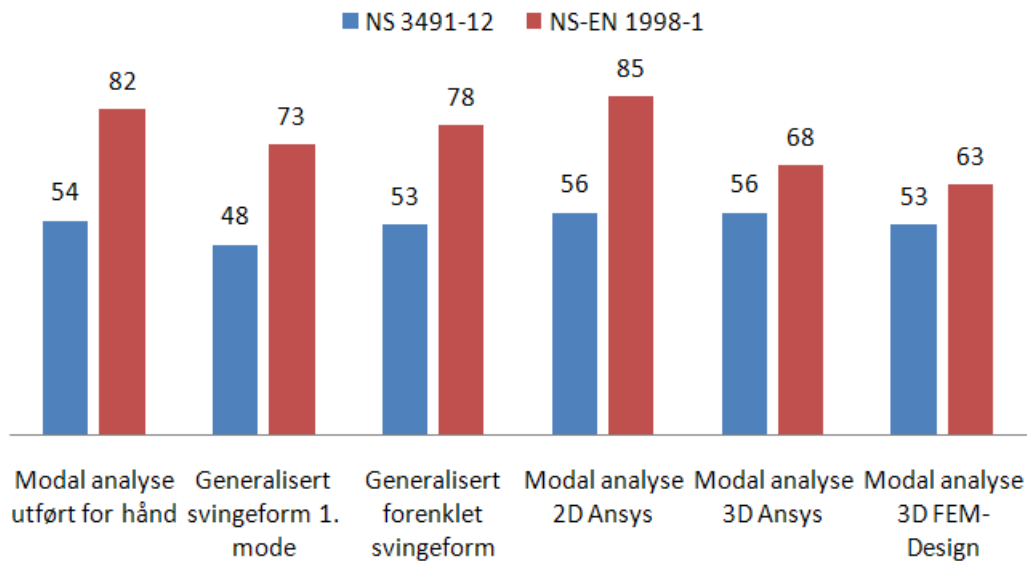
Vi ser også at analyse basert på generaliserte en-frihetsgradsystemer beregnet på grunnlag av den første moden gir størst lastvirkninger i nederste etasje i begge hovedretninger. I fjerde etasje gir den derimot mindre horisontallast enn noen av de andre todimensjonale analysemetodene. Når vi benytter en generalisert svingeform, er analysen enkel og rask, men den har også flere kilder til avvik enn i den modale analysen. Derfor må vi gå ut fra at de modale analysene har gitt mer korrekte resultater enn den generaliserte, og at differansen dermed kan betraktes som avvik. Dermed kan vi konkludere at analyse basert på generaliserte en-frihetsgradsystemer for vårt system gir bedre resultater når den generaliserte svingeformen og naturlige svingeperioden beregnes ved hjelp av de forenklete metodene i regelverkene. Analyse basert på en generalisert svingeform som tilsvarende den første naturlige svingeformen til bygget anbefales derfor ikke, siden den er mer arbeidskrevende og mindre pålitelig enn den samme analysemetoden utført forenklet.



Figur 12.2: Horisontallasten i hvert vindkyss i x -retning i øverste etasje beregnet med forskjellige analysemetoder. Kreftene er gitt i kN og tatt fra avsnitt 8.3, 8.4, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5, 10.2, 10.3, 11.2, 11.3, 11.4 og 11.5. Lastvirkningene er diskutert utførlig i kapitlene der de er beregnet



Figur 12.3: Horisontallasten i hvert vindkyss i y -retning i nederste etasje beregnet med forskjellige analysemetoder. Kreftene er gitt i kN og tatt fra avsnitt 8.3, 8.4, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5, 10.2, 10.3, 11.2, 11.3, 11.4 og 11.5. Lastvirkningene er diskutert utførlig i kapitlene der de er beregnet



Figur 12.4: Horisontallasten i hvert vindkyss i y -retning i øverste etasje beregnet med forskjellige analysemetoder. Krefte er gitt i kN og tatt fra avsnitt 8.3, 8.4, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5, 10.2, 10.3, 11.2, 11.3, 11.4 og 11.5. Lastvirkningene er diskutert utførlig i kapitlene der de er beregnet

En siste viktig tendens er at modale todimensjonale analyser i de fleste tilfeller gir større lastvirkninger enn tilsvarende analyser med flere frihetsgrader. I denne sammenhengen skal vi huske på at eurokoden sitt tillegg for utilsiktet eksentrisitet er mindre for tre- enn todimensjonale analyser. Men tendensen, som er tydeligst i den nederste etasjen, er den samme for NS 3491-12. Begrunnelsen er at tredimensjonale analyser har flere frihetsgrader. Det gir mindre tilført stivhet og en mer realistisk fordeling av massene som i alle de modale analysene er betraktet som samlet i nodene.

Alle betraktningene vi har gjort i dette kapitlet er diskutert grundig i kapitlene der lastvirkningene er beregnet. Som nevnt, er det i alle kapitlene beregnet flere lastvirkninger enn de som er gjengitt i figur 12.1 til 12.4. De er også diskutert i de respektive kapitlene.

Basert på diagrammene og argumentene i dette kapitlet kan vi konkludere med at modal tredimensjonal analyse gir mest pålitelige resultater og samtidig relativt begrensede lastvirkninger. Analysen som er minst tidkrevende, er basert på en generalisert svingeform og naturlig svingeperiode som er funnet ved forenklede metoder. Differansen mellom resultatene fra FEM-Design og den generaliserte, forenklede svingeformen er på henholdsvis 12, 1 og 10 % i figur 12.1 til 12.3 når lastvirkningene beregnes i henhold til NS 3491-12. I figur 12.4 er resultatene fra de to analysene identiske. Avvikene er altså neglisjerbare i den øverste etasjen, og ved betraktning av figurene kan det konkluderes at de er konservative i den nederste. Differansen er større for eurokoden pga. tillegget for uønsket torsjon, men det bidrar samtidig til å gjøre den forenklede analysen konservativ. Analyse basert på generaliserte en-frihetsgradsystemer med forenklet svingeform og tilnærmet egensvingeperiode gir altså konservative avvik som i de fleste tilfeller er relativt små. Den er som nevnt også rask og enkel. Derfor anbefales generalisert en-frihetsgradanalyse til å anslå de dimensjonerende seismiske lastvirkningene på bygg som tilfredsstillende geometriske kravene til denne metoden. Dersom disse lastvirkningene viser seg å være i en problematisk størrelsesorden gjennomføres det en modal, tredimensjonal analyse. Denne vil i de fleste tilfeller gi

mindre lastvirkninger.

Av alle metodene var den modale analysen utført for hånd den mest tidkrevende. Når det er behov for modal analyse, anbefales det derfor å gjennomføre den på datamaskin. Det tar ikke lenger til å modellere i tre dimensjoner enn i to, og den romlige analysen gir generelt mindre lastvirkninger. Derfor anbefales modal 3D-analyse.

Del III

Viktige aspekter

Kapittel 13

Innledning til hoveddel III

Hensikten med kapittel 8 var å sammenlikne regelverk og beregningsmetoder. Til det formålet benyttet vi et svært regulært bygg. Det var dobbeltsymmetrisk med kontant stivhet i etasjene og nesten lik masse på hvert dekke. I dette kapitlet skal vi i stedet se på mer vanlige og kompliserte bygg. Ved hjelp av disse gjennomgår vi viktige aspekter innenfor dimensjonering for jordskjelv. Hva skjer for eksempel hvis massen ikke er tilnærmet lik i alle etasjene? Eller hvis bygget ikke er dobbeltsymmetrisk? Disse og andre aspekter belyses via eksempler basert på bygget som er vist i figur 7.1. Vi gjennomfører analyser av responsen ved jordskjelv for konstruksjoner som er nesten lik det dobbeltsymmetriske bygget fra kapittel 7, og sammenlikner resultatene med de for det regulære bygget. Kapittel 14 handler om antallet etasjer bygget har, og vi diskuterer konsekvensene ved å bygge nye etasjer på eksisterende bygg. I kapittel 15 ser vi på en rekke tilfeller der stivheten og/eller massen er annerledes enn i hoveddel II, men byggene er fortsatt dobbeltsymmetriske. Også her kommer vi inn på konsekvensene ved ombygging. I kapittel 16 tar vi for oss tilfellet der bygget ikke er dobbeltsymmetrisk, og benytter endringen av modene til å undersøke viktigheten av å beregne flest mulig moder. Kapittel 17 handler om grunnforhold og fundamenteringsprinsipper mens vi i kapittel 18 går inn på egenskapene til materialene som benyttes.

Målet med dette kapitlet er å belyse hvordan ulike forhold påvirker lastvirkningene fra jordskjelv, ikke å sammenlikne hverken regelverk eller beregningsmetoder. Siden byggene i denne delen av oppgaven generelt ikke oppfyller kravene som stilles i regelverkene for å kunne bruke modale 2D-analyser eller generaliserte en-frihetsgradsystemer, gjennomføres alle beregningene som modale tredimensjonale analyser. For å få best mulig sammenlikningsgrunnlag bruker vi det samme dataprogrammet og regelverket i alle analysene. FEM-Design versjon 9 og NS-EN 1998-1 er valgt.

Resultatene sammenliknes med lastvirkningene i avsnitt 11.5 i stedet for 8.4 fordi vi dermed jobber med analyser der tillegget for uønsket torsjon beregnes på samme vis.

Kapittel 14

Antallet etasjer

14.1 Innledning

I Norge er det ikke vanlig å bestemme høyden til et bygg ut fra seismiske påvirkninger, men det er likevel interessant å undersøke innflytelsen antallet etasjer har på lastvirkningene. Det gir inntrykk av grunnakselerasjonens innvirkning på forskjellige typer bygg, og det er viktig med tanke på påbygg på eksisterende konstruksjoner. I avsnitt 14.2 sammenlikner vi resultatene som oppnås ved å gjennomføre analyser av bygget i figur 7.1, der antallet etasjer er henholdsvis to, tre, fire, fem og seks.

14.2 Teori og resultater

I dette avsnittet skal vi se på hvordan horisontallasten i vindkryssene påvirkes av antallet etasjer. Vi har gjennomført beregninger med henholdsvis to, tre, fire, fem og seks etasjer i FEM-Design versjon 9, men før vi ser på resultatet skal vi ta en liten titt på teorien bak.

Antallet etasjer til et bygg er en avgjørende faktor for lastvirkningene fra grunnakselerasjon. En økning fra for eksempel fire til fem etasjer øker den totale massen med ca. 25 %. Økt masse gir større effektive modale masser som igjen medfører større lastvirkninger. I dette avsnittet benytter vi den samme typen vindkryss i alle byggene, så stivheten i de nederste etasjene endres ikke. Flere etasjer tilsvarer altså et større forhold mellom masse og stivhet, noe som vil gi lengre egensvingeperioder. Det vil igjen gi lavere pseudoakselerasjon fordi bygg vanligvis tilhører det hastighetsensitive området av responsspektret. Denne tendensen vil begrense betydningen av den økte massen. Argumentene blir tydelige ved å se på ligning (3.2). Dersom massen økes, påvirker det både uttrykkene på høyre og venstre side av likhetstegnet.

Den første egensvingeperiode og tilhørende effektive modale masse for hvert bygg er vist i tabell

14.1. Her ser vi at forskjellen på egensvingeperiodene er størst i x -retning. Det begrenser forskjellen i lastvirkningene i hvert vindkryss i x -retning i en gitt etasje. De dimensjonerende lastene i vindkryssene i en gitt etasje i to forskjellige bygg vil altså være mer like for vindkryssene i x -enn i y -retning. Den effektive modale massen knyttet til den første svingeformen er relativt lik for x - og y -retning. Den er angitt i prosent av byggets totale masse, så den effektive modale massen knyttet til den første svingeformen i x -retning er vesentlig større for bygget med seks etasjer enn for bygget med to selv om prosentandelen er mindre. Derfor vil lastvirkningene øke med antallet etasjer.

Tabell 14.1: Den første egensvingeperioden og tilhørende effektive modale masse for byggene. I den andre raden er den første egensvingeperioden til hvert av byggene normalisert i forhold til den første egensvingeperioden til bygget med 6 etasjer. Bemerk at den effektive modale massen er angitt i % av den totale massen til bygget

x-retning						
Antallet etasjer		2	3	4	5	6
Første egensvingeperiode	s	0.531	0.578	1.038	1.318	1.778
Første egensvingeperiode normalisert		0.299	0.325	0.584	0.741	1.000
Tilhørende effektiv modal masse	%	93.0	86.1	85.1	82.7	81.2
y-retning						
Antallet etasjer		2	3	4	5	6
Første egensvingeperiode	s	0.379	0.420	0.742	0.941	1.226
Første egensvingeperiode normalisert		0.309	0.343	0.605	0.768	1.000
Tilhørende effektiv modal masse	%	92.6	85.3	84.7	82.5	81.2

Resultatet av analysene er vist i tabell 14.2. Lastene for bygget med fire etasjer har vi fra avsnitt 11.5, mens de andre kommer fra tilsvarende analyser. I tabell 14.3 er horisontallasten i hvert vindkryss normalisert i forhold til lasten i vindkrysset i samme etasje i bygget med seks etasjer. Det gir tydeligere inntrykk av forholdet mellom lastene i hvert av byggene. Som forventet, er forskjellen i lastene litt større i y - enn i x -retning, og forklaringen er plasseringen i responspektret samt forholdet mellom egensvingeperiodene. Siden byggenes første egensvingeperioder alle til-

Tabell 14.2: Horisontallasten i ett vindkryss i etasje k for bygg med forskjellig antall etasjer

	Vindkryss i x-retning					Vindkryss i y-retning				
k	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
	kN	kN	kN	kN	kN	kN	kN	kN	kN	kN
6	-	-	-	-	92	-	-	-	-	69
5	-	-	-	97	132	-	-	-	67	103
4	-	-	83	134	156	-	-	64	95	122
3	-	94	118	162	175	-	68	92	112	140
2	109	136	144	188	200	80	105	112	130	159
1	168	173	173	218	235	126	130	133	149	180

Tabell 14.3: Horisontallasten i ett vindkryss i etasje k for bygg med forskjellig antall etasjer delt på horisontallasten i det samme vindkrysset i et bygg med 6 etasjer

	Vindkryss i x -retning					Vindkryss i y -retning				
k	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
6	-	-	-	-	1.00	-	-	-	-	1.00
5	-	-	-	0.68	1.00	-	-	-	0.65	1.00
4	-	-	0.53	0.80	1.00	-	-	0.52	0.77	1.00
3	-	0.54	0.67	0.85	1.00	-	0.49	0.66	0.80	1.00
2	0.54	0.68	0.72	0.87	1.00	0.51	0.66	0.70	0.82	1.00
1	0.71	0.73	0.74	0.86	1.00	0.70	0.72	0.74	0.83	1.00

hører det hastighetsensitive området i responsspektret, er en endring av stivheten av stor betydning for resultatene. Det kommer også frem at lasten i vindkryssene i den nederste etasjen er nesten lik i alle byggene. Det er i de øvrige etasjene at de store forskjellene kommer frem. Særlig påfallende er det at byggene med to, tre og fire etasjer har tilnærmet samme last i vindkryssene i den nederste etasjen. Alle disse observasjonene er svært viktige med tanke på påbygg av etasjer på eksisterende bygg. Basert på resultatene i dette kapitlet kan vi konkludere at det i mange tilfeller vil gi begrensede konsekvenser i de nederste etasjene, og at byggets stivhet, som bestandig er viktig i forbindelse med seismiske laster, er enda viktigere i dette tilfellet. Men hvis et bygg er fleksibelt og allerede dimensjonert for seismiske laster vil det ikke kreve store tiltak i de eksisterende etasjene å bygge nye etasjer på. Vindlaster vil i de fleste tilfeller gi større problemer fordi lastene fra vind i henhold til gjeldende norsk regelverk

- øker med byggets høyde, slik at den totale vindlasten på et 20 meter høyt bygg er mer enn dobbelt så stor som den totale vindlasten på et 10 meter høyt bygg [44]
- vanligvis betraktes som samtidig virkende statiske laster på hver etasje [44]

Når vi beregner seismiske lastvirkninger holdes lasten i de nederste etasjene liten ved at modene gir utslag i forskjellige retninger (se under figur 8.4) og flere etasjer gir lengre egensvingeperioder. Dette illustreres ved å regne ut den økte lasten i nederste etasje dersom bygget med tre etasjer påbygges tre nye, slik at det endelige bygget har seks etasjer. I tabell 14.3 ser vi at den dimensjonerende lasten fra seismisk påvirkning i vindkryssene i første etasje kun er $0.73^{-1} = 1.37$ ganger større i x -retning og $0.72^{-1} = 1.39$ ganger større i y -retning. For vind ville faktorene vært på minst 2. Men det betyr ikke at de seismiske lastvirkningene ikke kan være dimensjonerende ved påbygg. Dersom ulykkesgrensen jordskjelv var dimensjonerende da bygget opprinnelig ble konstruert, kan de seismiske lastvirkningene fortsatt være større enn vindlasten når det bygges på. Det skal samtidig nevnes at de fleste eksisterende bygg er oppført før det ble påkrevd å prosjektere for seismiske lastvirkninger. Det betyr at de kan være ute av stand til å motstå et jordskjelv av størrelsesordenen som kreves i dag. Dersom byggets statiske system endres, hvilket er tilfelle når det bygges på en ekstra etasje, er det påkrevd at hele bygget skal dimensjoneres for seismiske lastvirkninger. For slike bygg vil det være vanskelig å oppgradere alle de eksisterende konstruksjonene, herunder hovedsaklig fundamentene, for lastvirkningene fra jordskjelv. En ombygging vil derfor bli dyr.

Kapittel 15

Fordeling av masse og stivhet

15.1 Innledning

Fordelingen av masse og stivhet i en konstruksjon er av stor betydning for hvordan den påvirkes ved jordskjelv fordi den styrer egensvingeperiodene og svingeformene til byggverkets moder. De påvirker både pseudoakselerasjonene og fordelingen av lastvirkningene. I dette kapitlet skal vi se på hvordan forholdet mellom masse og stivhet og fordelingen av stivheten påvirker responsen til et dobbeltsymmetrisk bygg. I kapittel 16 går vi videre til å undersøke konsekvensene av at bygg ikke er dobbeltsymmetriske.

Avsnitt 15.2, 15.3 og 15.4 handler om konsekvensene valget av avstivningssystem har på responsen til jordskjelv. Vi analyserer først et bygg med betongskiver som er leddet til dekkene, og deretter et der betongskivene er fast innspent i dekkene. Det første tilsvarer bygging med prefabrikkert betong (hulldekker), mens det andre er typisk for plasstøpte betongkonstruksjoner. Når det benyttes hulldekker i et bygg, må det tas stilling til i hvilken retning bærelinjene skal legges. Siden konstruksjonen i eksemplet vårt har svært forskjellig stivhet i x - og y -retning, undersøker vi konsekvensene av å snu bærerretningen.

I avsnitt 15.5 til 15.7 ser vi på hvordan fordelingen av stivhet mellom etasjene påvirker resultatene. Vi begynner med situasjonen der den nederste etasjen er mer fleksibel enn de øvrige. Her benytter vi oss av at betongskiver er stivere enn vindkryss i stål. Deretter undersøker vi hvordan en ekstra etasje med lett takkonstruksjon påvirker lastvirkningene, og til slutt ser vi på situasjonen der det er stor masse på den øverste etasjen, for eksempel på grunn av en takterrasse. I tillegg undersøkes konsekvensene av differansen mellom ligning (8.52) og (8.53) i avsnitt 15.7.

Vi avslutter kapitlet med sammenlikning og diskusjon i avsnitt 15.8.

15.2 Betongskiver leddet til hulldekker som spanner i x -retning

I dette avsnittet betrakter vi et bygg som avviker fra det i figur 7.1 på to punkter. For det første har det betongskiver i stedet for vindkryss, og for det andre er etasjeskillerne hulldekker som spanner i x -retning. Skivene er 200 mm tykke, og hulldekkene er av typen HD265. Dekkene kan ikke overføre moment over oppleggene, de er fritt opplagt mellom HEB200-bjellene som ligger i akse A, B, C og D. Det settes inn søyler rundt skjakten i de tre nederste etasjene som bærer bjelker for opplegg av enveisplatene. Hulldekkene har lavere egenvekt enn de plasstøpte dekkene i bygget i figur 7.1. Egenvekten til et HD265 som er ferdig fuget, er 360 kg/m^2 , altså ca. halvparten av vekten til en 250 mm tykk massiv betongplate [5]. Samtidig veier betongskiver mindre enn vindkryss, så den reduserte vekten i dekkene vil ha begrenset effekt på resultatene. Betongkvaliteten er vanligvis høyere for prefabrikerte elementer enn plasstøpte konstruksjoner, og vi modellerer i dette tilfellet dekkene med betongtype B45 mens vi beholder B30 for skivene.

For første gang i denne oppgaven jobber vi nå med et bygg der deformasjonen til komponenter i betong er av stor betydning. Fordi skivenes stivhet er svært avgjørende i beregningen av modene. I punkt 4.3.1(6) i eurokoden står det at det skal tas hensyn til rissdannelser i betong når bygget modelleres. FEM-Design gjør ikke dette automatisk, og vi må derfor benytte oss av den forenklete metoden som er gitt i punkt 4.3.1(7):

Med mindre det utføres en mer nøyaktig beregning av de opprissede bygningsdelene, kan de elastiske bøye- og skjærstivhetsegenskapene til betong- og murbygningsdeler settes lik halvparten av den tilhørende stivheten for de uopprissede bygningsdelene.

Dette punktet er gjenstand for mye diskusjon i fagmiljøet. Uenigheten om hvordan det skal tolkes er stor, og en halvering av stivheten til avstivende komponenter er svært avgjørende for de dimensjonerende lastvirkningene. Punktet kan tolkes på tre måter. De er som følger:

1. Stivheten til alle komponenter som kan risse halveres. Bakgrunnen for denne tolkningen er at en halvering av stivheten til de opprissede betong- og murkomponenter er konservativt. Forsøk viser at stivheten i virkeligheten bare tilsvarer en fjerdedel av den urissede. Det som taler mot denne tolkningen, er at alle bygg i betong og mur risser. Det bør den dimensjonerende E-modulen til disse materialene ta hensyn til. I eurokoden for betongkonstruksjoner er det ikke nevnt at betongens stivhet skal reduseres på grunn av riss [41]. Så det virker rart at alle komponenter, inklusive de som ikke risser, skal ha annerledes stivhet når vi betrakter seismiske lastvirkninger enn når vi betrakter vind- eller nyttelast
2. I punktet er “de opprissede bygningsdelene” nevnt. Det kan tolkes som at punktet kun gjelder der det er rissdannelser. I så fall tas det ikke hensyn til at det er konservativt kun å halvere stivheten
3. Frasen “de opprissede bygningsdelene” kan også tolkes som hver komponent som risser opp. I en skive vil det vanligvis oppstå riss i endene i de nederste etasjene. I henhold til denne tolkningen halveres stivheten til skiven ikke kun der den risser (endene), men også

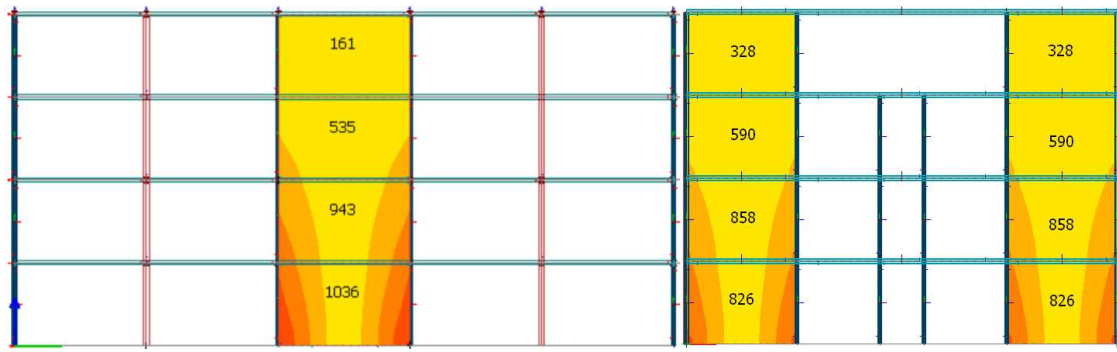
der den ikke risser (midt i skiven). Dermed tas det hensyn til at det er konservativt kun å halvere stivheten

Utgiveren av eurokoden, Standard Norge, har uttalt at de er klar over at det er rom for tolkning av punktet, og at de derfor anbefaler å utvise forsiktighet i forbindelse med reduksjon av stivhet på grunn av riss. Vi har i denne oppgaven valgt å benytte tolkningen i punkt 3 fordi den er mer konservativ enn tolkningen i punkt 1, og mindre tidkrevende enn tolkningen i punkt 2.

Siden mindre stivhet gir lengre egensvingeperioder, gir en reduksjon av stivheten også i de aller fleste tilfeller mindre lastvirkninger [15]. Det som er utfordrende ved å skulle ta hensyn til riss, er at vi ikke på forhånd vet hvilke komponenter som risser opp. Vi må derfor først beregne uopp-risset, undersøke hvilke komponenter som risser mest, halvere deres stivhet og gjennomføre en ny modal analyse. Den nye løsningen vil gi lengre egensvingeperioder fordi stivheten til kritiske komponenter er halvert. Lengre egensvingeperiode tilsvarer for bygg flest mindre laster, men hvis den nye analysen fortsatt gir riss i noen komponenter som vi ikke allerede har tatt hensyn til, halverer vi stivheten til de som risser mest, og beregner på nytt. Dette kan ta tid. Men det er viktig ikke først å beregne uopp-risset og deretter halvere stivheten til alle komponenter som risser opp i den analysen. For halvert stivhet betyr mindre lastvirkninger, så hvis vi begynner med å halvere stivheten til de komponentene som risser mest, vil de som ikke risset fullt så mye kanskje slett ikke risse i den nye analysen. For bygget vi analyserer i dette avsnittet, er det skivene som opplever størst deformasjon, og det er derfor disse vi vil konsentrere oss om med hensyn på riss. Alle skivene er 200 mm tykke og utført i betongkvalitet B30. Betongen tåler strekkspenning opp til $f_{ctm} = 2.90 \text{ N/mm}^2$ før den begynner å risse opp [41]. I skivens lengderetning betyr det at betongen risser dersom aksiallasten overskrider $200 \text{ mm} \cdot 2.90 \text{ N/mm}^2 = 580 \text{ kN/m}$.

Siden hulldekkene er enveisplater og fritt opplagt, vil de ha relativt lange egensvingeperioder. Samtidig vil de ikke påvirkes bemerkelsesverdig av horisontal grunnakselerasjon fordi de kun deformeres ved vertikal svingning. Hvis det ses bort fra den vertikale komponenten til jordskjelv, vil hulldekkene altså forbli tilnærmet horisontale. Både det at egenvekten i hver etasje er mindre enn for bygget i figur 7.1, og det at betongskiver er stivere enn vindkryss, vil bidra til å forkorte egensvingeperiodene til bygget. Siden konstruksjonen tilhører det hastighetsensitive området av responsspektret vil kortere naturlige svingeperioder bidra til større lastvirkninger i forbindelse med jordskjelv.

I vår analyse kombinerer vi moder med større effektive modale masser enn 2 % av byggets totale masse. Grunnen til at vi ikke tar med alle modene er at vi ønsker å neglisjere bidrag som skyldes numeriske feil i beregningen. Etter den første gjennomregningen finner vi spenningene som er vist i figur 15.1. Her ser vi at skivene i x -retning i de to nederste etasjene risser, mens det i y -retning kun er skivene i den øverste etasjen som forblir urisset. Ut fra resultatet påbegynnes en iterasjonsprosess med halvering av stivhet for de hardest utnyttede skivene. Resultatet av analysen med risset betong er vist i figur 15.2. Her ses det at det fortsatt oppstår riss i skivene i akse 2 og 5 i tredje etasje. Men området der spenningene overskrider 580 kN/m er så lite at skivene praktisk tatt ikke risser. Det kommer flere interessante ting frem ved å sammenlikne figur 15.2 og 15.1. Vi ser for eksempel at spenningene er størst i første etasje i x -retning men i andre etasje i y -retning. Vi ser også at spenningen i samtlige skiver i x -retning er større i figur 15.1 enn i figur 15.2,



Figur 15.1: Vertikale spenninger i skivene med urisnet betong angitt i kN/m . Figuren viser oppriss i x - z -plan til venstre og i y - z -plan til høyre. Der spenningen overstiger 580 kN/m vil skivene risse

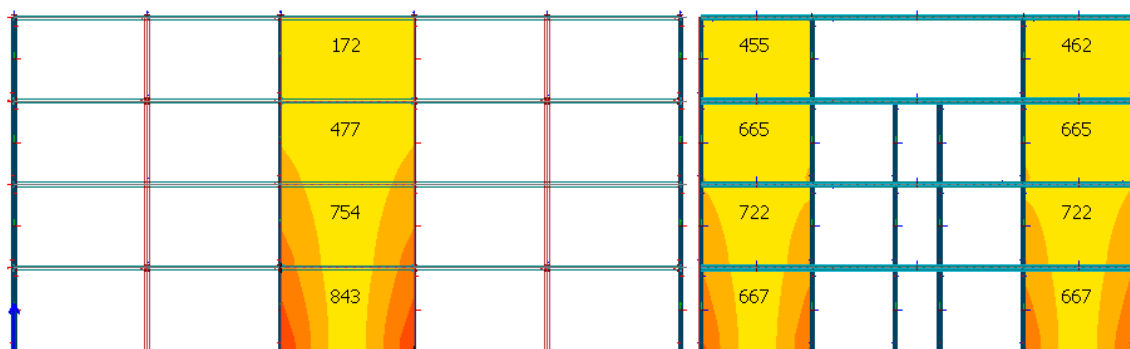
mens spenningen i skivene i y -retning blir større i den øverste etasjen når det tas hensyn til riss. Forklaringen kan til dels finnes i figur 15.3 til 15.5 som viser modene med størst effektiv modal masse i henholdsvis x -, y - og z -retning. Modenes egensvingeperioder og effektive modale masser ses i tabell 15.1. De to viktigste forskjellene mellom tabell 15.1 og 11.5 er at egensvingeperiodene er kortere og at de høyere modene har større effektiv modal masse i tilfellet med betongskiver. Det gir spesielt i de øverste etasjene større lastvirkninger.

Tabell 15.1: Egensvingeformer med tilhørende naturlige svingeperioder og effektive modale masser for utvalgte moder til bygget med hulldekker som spenner i x -retning. De effektive modale massene er angitt i prosent av den totale massen til bygget

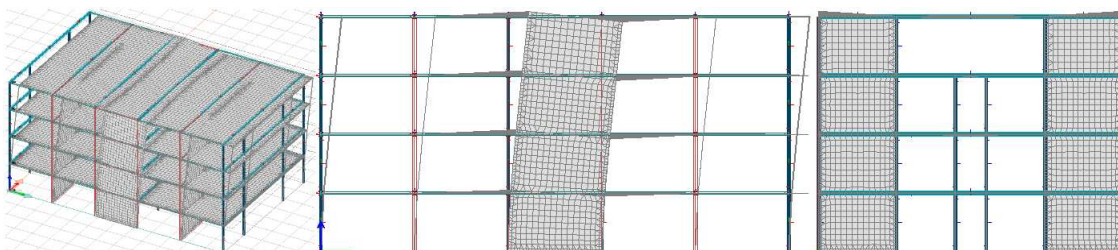
k	T	m_{kx}	m_{ky}	m_{kz}
	s	%	%	%
1	0.404	72.6	0.0	0.0
2	0.347	0.0	72.1	0.0
4	0.142	0.0	0.0	22.3
6	0.130	0.0	0.0	10.1
14	0.086	0.0	0.0	6.6
16	0.084	20.6	0.0	0.0
22	0.077	0.0	0.0	11.3
23	0.072	0.0	16.6	0.0
24	0.071	0.0	0.0	8.5
27	0.069	0.0	4.1	0.0
29	0.065	0.0	0.0	13.8

Den første moden er vist i figur 15.3. Av svingeformen ser vi at dekkene ikke overfører moment over oppleggene. Det skyldes at de er fritt opplagt.

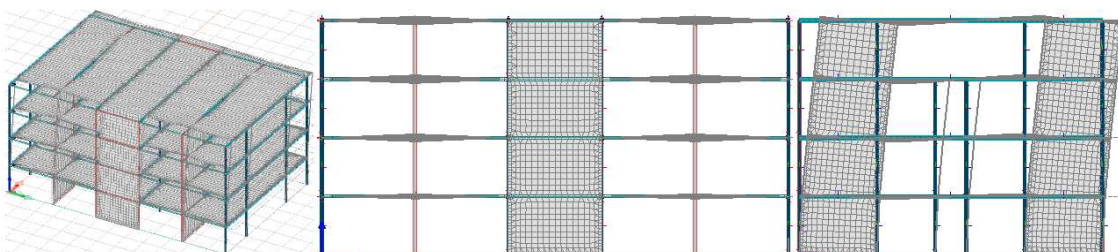
Den andre moden angir forskyvning i y -retning. Den er vist i figur 15.4. Vi ser at deformasjonene i andre etasje er store, og det bidrar sammen med den 23. moden til de store spenningene i figur 15.2 i denne etasjen.



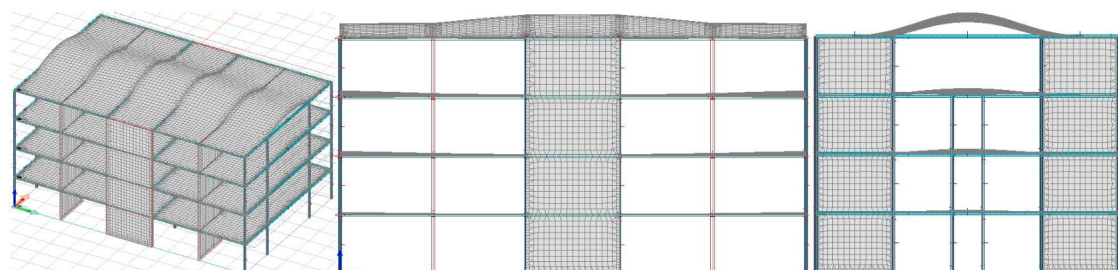
Figur 15.2: Vertikal last i skivene med urisnet betong i de to øverste etasjene og halvert stivhet i de nederste. Figuren viser oppriss i x - z -plan til venstre og i y - z -plan til høyre. Lasten er angitt i kN/m . Der spenningen overstiger $580 kN/m$ vil skivene risse. Bemerk at lasten i de øverste skivene i y -retning ikke er lik. Siden bygget er dobbeltsymmetrisk er dette en indikasjon på de feil som bestandig følger med bruk av elementmetoden



Figur 15.3: Den første naturlige svingeformen med hulldekker i x -retning angir translasjon i x -retning



Figur 15.4: Den andre naturlige svingeformen med hulldekker i x -retning angir translasjon i y -retning



Figur 15.5: Den fjerde naturlige svingeformen med hulldekker i x -retning angir translasjon i z -retning

Figur 15.5 viser svingeformen til den fjerde moden. Denne har størst utslag i de øverste etasjene, og det bidrar til å øke lastvirkningene her. Denne svingeformen kan altså være en forklaring på hvorfor spenningene i de øverste etasjene reduseres mindre (og i et tilfelle øker) når stivheten i skivene reduseres.

Den horisontale lasten i hver skive i x -retning blir

$$\mathbf{H}_{skive, x} = \begin{bmatrix} 123 \\ 211 \\ 271 \\ 312 \end{bmatrix} kN. \quad (15.1)$$

Når vi sammenlikner resultatet med det i ligning (11.11), ser vi tydelig effekten av at betongskiver er stivere enn vindkryss. Lastene i ligning (15.1) er alle vesentlig større enn de i ligning (11.11). Forskjellen er på 48, 78, 87 og 80 % i henholdsvis fjerde, tredje, andre og første etasje. Lasten er altså økt vesentlig mindre i den øverste etasjen enn i de andre. Grunnen til det er for det første at vi kun fant to moder med effektiv modal masse i x -retning og responsen i den øverste etasjen er særlig avhengig av de høyere modene. For det andre blir belastningen størst i de etasjene som har minst stivhet. Det ser vi nærmere på i avsnitt 15.5. Siden vi har halvert stivheten i de nederste etasjene blir utslagene i den første naturlige svingeformen forholdsvis store her. Det ses ved sammenlikning av figur 11.31 og 15.3.

Den horisontale lasten i hver skive i y -retning blir

$$\mathbf{H}_{skive, y} = \begin{bmatrix} 77 \\ 131 \\ 165 \\ 186 \end{bmatrix} kN. \quad (15.2)$$

Igjen er kraftene større enn i tilfellet med vindkryss. Forskjellen mellom kraftene i ligning (15.2) og (11.12) er henholdsvis 23, 44, 48 og 41 %. Også her er årsaken til at vi ikke kom frem til større last i den øverste etasjen at vi kun har kombinert tre moder med effektiv modal masse i y -retning. Grunnen til at forskjellen mellom resultatene i avsnitt 11.5 og dette er mindre i y - enn i x -retning er at konstruksjonene i begge tilfeller er stivest i y -retning. Egensvingeperiodene til både den første og andre svingeformen i tabell 15.1 tilhører det hastighetsensitive området av responsspektret, og økningen i pseudoakselerasjon er størst i x -retning fordi endringen av egensvingeperiode er størst i x -retning. Når vi sammenlikner egensvingeperiodene i tabell 11.5 og 15.1 ser vi at egensvingeperioden til den første moden i x -retning er 60 % kortere i dette avsnittet mens den første moden i y -retning er tilnærmet halvt så lang i dette avsnittet som i 11.5. Slik er det også for den andre moden i hver hovedretning. Mode fire i tabell 11.5, som tilsvarer den andre moden i x -retning, har en dimensjonerende pseudoakselerasjon som er 0.8 ganger pseudoakselerasjonen til mode 16 i tabell 15.1, se ligning (8.89). I y -retning er det samme forholdet 1.2, så den andre moden i y -retning har mindre pseudoakselerasjon i tabell 15.1 enn 11.5. Det har også innvirkning på resultatene i y -retning at modene med effektiv modal masse i z -retning gir lastvirkninger på vindkryssene i y -retning. Det ses for eksempel i figur 11.39. Svingeformen i figur 15.5 påvirker også skivene i akse 2 og 5, men her tas lasten opp i vertikalt strekk og trykk, og den horisontale komponenten er svært begrenset. Derfor vil effekten av de vertikale svingeformene være relativt liten for den

horisontale lasten i skivene i y -retning, men innflytelsen er stor for kreftene i ligning (11.12), og her særlig for de øverste etasjene. Derfor jevner de vertikale svingeformene ut forskjellene mellom lastvirkningene i y -retning for de to bæresystemer.

15.3 Betongskiver leddet til hulldekker som spanner i y -retning

Beregningen i dette avsnittet er helt tilsvarende den i avsnitt 15.2 bortsett fra at dekkene nå spanner i y -retning. De er opplagt på bjelker i tallaksene. Som i avsnitt 15.2, forventer vi at de horisontale modene vil ha kortere naturlige svingeperioder enn i avsnitt 11.5. Spennretningen vil påvirke egensvingeperiodene til modene som er knyttet til vertikal forskyvning, men den vil ha svært liten innflytelse på lastvirkningene fra horisontal grunnakselerasjon. Også i dette tilfellet risser skivene i første og andre etasje, og vi finner kun den første svingeformen i henholdsvis x - og y -retning. Resultatet er

$$\mathbf{H}_{skive,x} = \begin{bmatrix} 133 \\ 226 \\ 284 \\ 326 \end{bmatrix} kN \quad \text{og} \quad \mathbf{H}_{skive,y} = \begin{bmatrix} 74 \\ 128 \\ 162 \\ 186 \end{bmatrix} kN. \quad (15.3)$$

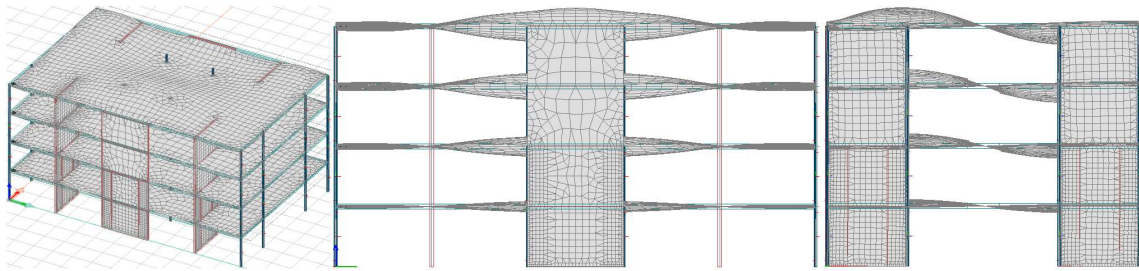
Når vi sammenlikner disse lastvirkningene med dem i ligning (15.1) og (15.2) ser vi at disse er litt større i x -retning og litt mindre i y -retning når hulldekkene spanner i y -retning. Differansen er størst i de øverste etasjene fordi vi fant færre moder med effektiv modal masse i x - og y -retning til kombinasjonen i ligning (15.3). Grunnen til det er at hulldekkenes egensvingeperioder er lengre når de spanner i y -retning fordi spennet er lengre i y - enn x -retning. Derfor har flere av de første 60 modene effektiv modal masse i z -retning når dekkene spanner i y - enn x -retning. Likevel er forskjellene alle på under 8 %, og gjennomsnittet av forskjellene er på bare 4 % så konklusjonen er at det for bygget i vårt eksempel ikke spiller en stor rolle om hulldekkene har lange eller korte spenn.

15.4 Betongskiver og flatdekker

I dette avsnittet betrakter vi et bygg som avviker fra det i figur 7.1, ved at vindkryssene er erstattet av betongskiver som er fast innspent i dekkene. Som i avsnitt 15.2 og 15.3, er skivene 200 mm tykke, men i dette avsnittet er betongkvaliteten B30 som i kapittel 11. Siden flatdekkene er kontinuerlige over oppleggene og fast innspent i skivene vil dekkene krummes når bygget svinger horisontalt. Det vil bidra til å korte egensvingeperiodene i forhold til resultatene i 15.2 og 15.3 og dermed gi større lastvirkninger fra de første modene. I analysene viser det seg at skivene vil risse i både første og andre etasje, så stivheten halveres her. Tabell 15.2 viser egensvingeperioder og effektiv modal masse til modene vi benytter i kombinasjonen. Her ser vi at egensvingeperiodene til de første modene er kortere enn i tilfellet med hulldekker som er vist i tabell 15.1, men lengre for de høyere modene. Det skyldes forskjellen i betongkvaliteten. Det er feil at mode 18 angir effektiv modal masse i y -retning. Svingeformen er vist i figur 15.6 der det kommer frem at denne moden egentlig ikke har effektiv modal masse i verken x -, y - eller z -retning. Tilfellet er det samme for

Tabell 15.2: Egensvingeformer med tilhørende naturlige svingeperioder og effektive modale masser for utvalgte moder til bygget med betongskiver og flatdekker. De effektive modale massene er angitt i prosent av den totale massen til bygget

k	T	m_{kx}	m_{ky}	m_{kz}
	s	%	%	%
1	0.428	73.1	0.0	0.0
2	0.359	0.0	73.2	0.0
4	0.148	0.0	0.0	27.7
6	0.119	0.0	0.0	19.6
7	0.109	0.0	0.0	2.7
17	0.092	20.7	0.0	0.0
18	0.087	0.0	1.2	0.0
21	0.079	0.0	18.3	0.0
25	0.071	0.0	1.0	0.0



Figur 15.6: Egensvingeformen til mode nummer 18 i tabell 15.2. Det ses at denne ikke skal ha effektiv modal masse i y -retning, så massen i tabellen skyldes feil i beregningen

mode 25. Derfor velger vi kun å kombinere modene med større effektiv modal massen enn 2 % av byggets totale masse. Det betyr at vi kun tar hensyn til de to første modene i x - og y -retning. Det vil gi forholdsvis mindre lastvirkninger i de øverste etasjene enn i tilfellene med hulldekker, se diskusjonen ved figur 8.4. De horisontale lastene i hver skive blir som følger:

$$\mathbf{H}_{skive,x} = \begin{bmatrix} 173 \\ 285 \\ 362 \\ 416 \end{bmatrix} kN \quad \text{og} \quad \mathbf{H}_{skive,y} = \begin{bmatrix} 114 \\ 183 \\ 223 \\ 247 \end{bmatrix} kN. \quad (15.4)$$

Sammenliknet med lastvirkningene i ligning (11.11) og (11.12) ser vi enda en gang hvordan stivheten til betongskivene gir større lastvirkninger. I x -retning er forskjellen på kreftene henholdsvis 108, 140, 150 og 140 % i fjerde, tredje, andre og første etasje. I y -retning er forskjellene på 82, 101, 101 og 87 %. Forskjellene er altså større enn i avsnitt 15.2, og akkurat som i tilfellet med hulldekker, er de størst i x -retning. Som forventet er differansen mellom ligning (11.11), (11.12) og (15.4) minst i den øverste etasjen.

15.5 Soft story

I dette avsnittet introduserer vi begrepet “soft story”. Det refererer til konstruksjoner der en etasje har mindre stivhet enn de øvrige. Denne situasjonen er svært vanlig, som oftest der første etasje er fleksibel, fordi denne skal ha utstillingsvinduer som ikke kan kombineres med betongskiver. Vi skal her undersøke konsekvensene av en slik fleksibel etasje ved å beregne lastvirkningene på et bygg som avviker fra det i figur 7.1, ved at vindkryssene i de tre øverste etasjene erstattes av 200 mm tykke betongskiver betongkvalitet B30. For å endre færrest mulig parametre i forhold til beregningene i del II, modelleres skivene som rotasjonsfritt forbundet til dekkene.

Endringene i konstruksjonen øker den totale massen litt fordi betongskiver veier mer enn vindkryss. Stivheten endres derimot betydelig, og økt stivhet gir kortere egensvingeperioder hvilket vanligvis gir større lastvirkninger. Siden stivheten er uforandret i den nederste etasjen og denne får større laster, vil det bli store forskyvninger her.

Ingen betongkomponenter risser opp. De horisontale lastvirkningene i hver avstivende komponent (skiver og vindkryss) blir som følger:

$$\mathbf{H}_{skive \& vk, x} = \begin{bmatrix} 99 \\ 181 \\ 239 \\ 325 \end{bmatrix} kN \quad \text{og} \quad \mathbf{H}_{skive \& vk, y} = \begin{bmatrix} 79 \\ 136 \\ 181 \\ 234 \end{bmatrix} kN. \quad (15.5)$$

I tabell 15.3 er differansen mellom resultatene i ligning (15.5) og de i avsnitt 11.5 oppsummert. Her ser vi at lastene med soft story er større enn i tilfellet med vindkryss i alle etasjer, og at forskjellen er størst i de nederste etasjene. I de tre nederste etasjene er forskjellen størst i x -retning, men det

Tabell 15.3: Forskjellene mellom skjærkraften i hver etasje fra denne analysen og de fra avsnitt 11.5. Differansen er angitt i prosent av verdien i avsnitt 11.5, og negativ verdi betyr at situasjonen med soft story gir minst respons

Etasje	x -retning	y -retning
4	20	23
3	53	47
2	66	62
1	88	77

skyldes ikke at endringen i egensvingeperioder også er størst i x -retning. Forholdet mellom den første naturlige svingeperioden i avsnitt 11.5 og den i dette avsnittet er $1.038/0.816 = 1.27$, mens det tilsvarende forholdet i y -retning er $0.742/0.588 = 1.26$. Det gir tilnærmet samme økning i pseudoakselerasjonen. Også økningen i de tilhørende effektive modale massene er nesten lik i de to hovedretningene. Årsaken ligger derimot i den andre moden. I tabell 11.5 og ligning (8.89) ser vi at den andre moden i x -retning for bygget med vindkryss i alle etasjer tilhører det hastighetsensitive området i designspektret. Den andre moden i y -retning er derimot akselerasjons sensitiv. For systemet med “soft story” er $T_{2x} = 0.234 s$ og $T_{2y} = 0.179 s$. De ligger altså begge i det konstante området i designspektret. Pseudoakselerasjonen til den andre moden i x -retning er derfor veldig

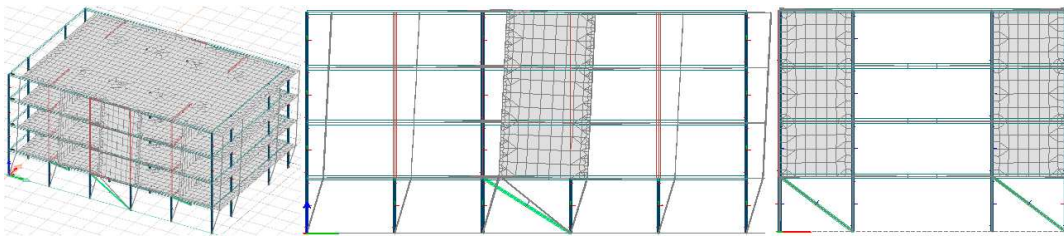
forskjellig i de to analysene, mens den er lik i y -retning. Derfor at differansen mellom resultatene i ligning (15.5) og de i avsnitt 11.5 størst i x -retning.

Den store differansen i tabell 15.3 skyldes ikke økt stivhet. Det kommer frem ved å sammenlikne resultatene i ligning (15.5) med de i ligning (15.1) og (15.2), se tabell 15.4. Egensvingeperiodene

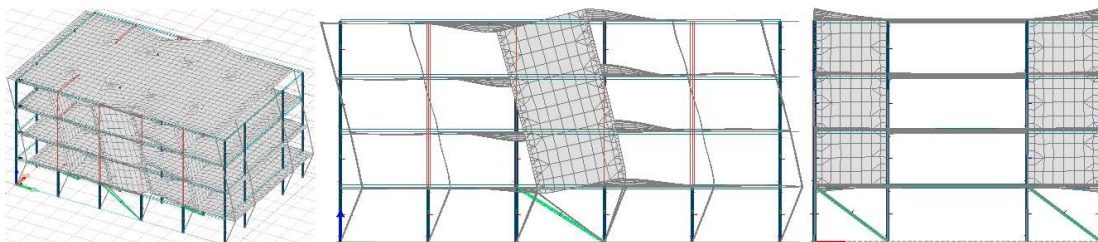
Tabell 15.4: Forskjellene mellom skjærkraften i hver etasje fra denne analysen og de fra avsnitt 15.2. Differansen er angitt i prosent av verdien i avsnitt 15.2, og negativ verdi betyr at situasjonen med soft story gir minst respons

Etasje	x -retning	y -retning
4	-10	26
3	-12	17
2	-8	23
1	15	45

er vesentlig kortere i avsnitt 15.2 enn her, men tabell 15.4 viser at lastvirkningene i de fleste etasjene likevel er størst i dette avsnittet. Differansen er størst i de tre øverste etasjene der de høyere modene vanligvis gir større utslag. En del av forklaringen på dette finnes i figur 15.7 og 15.8 som viser de to første svingeformene i x -retning. Her ser vi at begge disse modene gir store



Figur 15.7: Den første naturlige svingeformen med “soft story” vist i 3D (til venstre) samt oppriss. Egensvingeperioden er på 0.816 s og den effektive modale massen i x -retning tilsvarer 95.4 % av byggets modale masse. Vi ser at denne viktige moden gir svært store utslag i første etasje



Figur 15.8: Den fjerde naturlige svingeformen med “soft story” vist i 3D (til venstre) samt oppriss. Dette er den andre moden som gir utslag i x -retning. Egensvingeperioden er på 0.234 s og den effektive modale massen i x -retning tilsvarer 4.4 % av byggets modale masse. Vi ser at også denne viktige moden gir svært store utslag i første etasje

utslag i første etasje. Den andre (fjerde) svingeformen gir faktisk større utslag i den nederste enn de øverste etasjene. Det er svært uvanlig for høyere modene. Grunnen til at den første svingeformen

har så stor effektiv modal masse er at nesten all massen beveger seg like mye i samme retning. Også de to første modene med utslag i y -retning har store forskyvninger i første etasje og nesten all effektiv modal masse samlet i den første moden. Vi fant kun to moder med effektiv modal masse i henholdsvis x - og y -retning. Kombinasjonen som ligger til grunn for lastvirkningene i ligning (15.5) inkluderer altså ikke moder som gir store spenninger i de øverste etasjene.

Resultatene i dette avsnittet viser hvorfor bygg med “soft story” er svært ugunstige med tanke på jordskjelv. De bør generelt unngås. Bygg med liten stivhet i de nederste etasjene er svært vanlig har i landet fordi det først ble påkrevd å dimensjonere for jordskjelv da NS 3491-12 utkom i desember 2004. En fleksibel etasje er ikke problematisk i forbindelse med beregning av laster fra vind og skjevstilling. Samtidig har betongvegger gode egenskaper til annet enn avstivning, som for eksempel lyd- og brannisolasjon. Et leilighetsbygg med parkeringskjeller eller butikker i den nederste etasjen vil derfor ofte kunne bli en “soft story”-konstruksjon. Her er det viktig at den rådgivende ingeniøren kommer inn på et tidlig tidspunkt i planleggingen og advarer om problematikken. Dersom det er nødvendig å ha mer stivhet i de øverste etasjene kan det anbefales å benytte vindkryss i stedet for betongskiver i de avstivende bygningsdelene som ikke er kontinuerlige gjennom alle etasjene. Mange eksisterende bygg her i landet har som nevnt soft story. Regelverket er ikke gjeldende med tilbakevirkende kraft, men det er gjeldende for konstruksjoner som ombygges. Det betyr at soft story-problematikken er svært aktuell med tanke på ombygging av eksisterende bygg med en fleksibel etasje. Her vil en byggherre kunne få en ubehagelig overraskelse når de seismiske lastene forelegges, og han bør derfor informeres om situasjonen på et tidlig stadie.

Soft story-problematikken er også aktuell for andre etasjer enn den nærmest terreng. Det er derfor også en dårlig idé å veksle ut søyler i en etasje for å oppnå en mer åpen planløsning midt i bygget. Dette gjelder både for nye og eksisterende bygg.

15.6 Lett øverste etasje

Nå skal vi se på tilfellet der det tilføyes en ekstra etasje til bygget i figur 7.1. For å unngå store endringer i konstruksjonen velges det å benytte lettak, som har en egenvekt på 0.5 kN/m^2 . Det gir en total egenlast inklusive påført egenlast på 1 kN/m^2 . Bæresystemet til lettaket krever at det settes inn ekstra søyler mellom akse B og C. Ut fra resultat i kapittel 14 kan vi forvente at påbygningen vil ha liten innflytelse på lastene i vindkryssene i de opprinnelige etasjene. Egensvingeperiodene vil bli lengre, hvilket vil redusere lastvirkningene, mens massen i bygget økes litt, hvilket vil gi større lastvirkninger.

Lastene på hvert vindkryss i x -retning blir

$$\mathbf{H}_{vk,x} = \begin{bmatrix} 22 \\ 89 \\ 118 \\ 143 \\ 169 \end{bmatrix} \text{ kN.} \quad (15.6)$$

Sammenliknet med lastene som fremkommer ved å bygge på en etasje i betong, se tabell 14.2, gir

løsningen med lettak som forventet mindre last i samtlige etasjer. Det er også bemerkelsesverdig at lastvirkningene i de to nederste etasjene i ligning (15.6) er mindre enn i tilfellet med bare fire etasjer. Det kan skyldes at vi kun fant tre moder med utslag i x -retning mens vi fant fire i analysen med fire etasjer. Men de høyere modene har generelt større innvirkning på lastvirkningene i de øverste etasjene, så det er antakeligvis ikke forklaringen. Det er mer sannsynlig at differansen skyldes den ekstra etasjen som bidrar til å forlenge egensvingeperiodene til bygget. I y -retning blir lastvirkningen på vindkryssene som følger:

$$\mathbf{H}_{vk,y} = \begin{bmatrix} 16 \\ 65 \\ 89 \\ 108 \\ 129 \end{bmatrix} kN. \quad (15.7)$$

Også her er lastene i alle etasjene mindre enn de som fremkommer ved å bygge den øverste etasjen i betong, se tabell 14.2. Sammenliknet med lastene i vindkryssene i bygget i figur 7.1, er lastene i ligning (15.7) kun større i fjerde etasje. I y -retning ble kun de to første modene inkludert i kombinasjonen, men igjen ser vi at det er lastvirkningene i de lavere etasjene som reduseres, og som i x -retning er årsaken forlengelsen av de naturlige svingeperiodene. Vi har altså kommet frem til at konsekvensene ved å bygge på en lett etasje er små i både x - og y -retning. Det betyr at dette er en god løsning dersom det er ønskelig å bygge på et bygg som ikke har kapasitet til at de seismiske lastvirkningene økes, uansett om den eksisterende konstruksjonen er relativt stivt eller fleksibelt.

15.7 Tung øverste etasje

Hva er konsekvensene av å samle mye masse øverst i et bygg? Det undersøker vi i dette avsnittet, der vi beregner lastvirkningene på et bygg som tilsvarer det i figur 7.1. Forskjellen på analysen her og den i avsnitt 11.5 er at nyttelasten på taket økes til $4 kN/m^2$ og den påførte egenvekten til $1 kN/m^2$. Det kan for eksempel tilsvare lasten fra en takterrasse. Økt forhold mellom masse og stivhet gir lengre egensvingeperioder, som gir lavere pseudoakselerasjon. Samtidig gir økt masse også større effektiv modal masse. I kapittel 14 så vi at en ekstra etasje, som jo gir økt masse øverst i bygget, ga større lastvirkninger i samtlige vindkryss, og at økningen var størst i de øverste etasjene. Resultatene vil sannsynligvis være tilsvarende her.

Lastene beregnes ved bruk av komplett kvadratisk kombinasjon av alle moder med mer enn 2 % effektiv modal masse i en hovedretning. Resultatet for vindkryssene i x -retning blir

$$\mathbf{H}_{vk,x} = \begin{bmatrix} 89 \\ 122 \\ 146 \\ 174 \end{bmatrix} kN. \quad (15.8)$$

Sammenliknet med kreftene i ligning (11.11) er de i ligning (15.8) større i de tre øverste etasjene, der forskjellen er på henholdsvis 7, 3 og 1 % i fjerde, tredje og andre etasje. I den nederste etasjen

er lasten i ligning (15.8) minst, og forskjellen er på 0.9 %. Bortsett fra i fjerde etasje er konsekvensene av å øke massen i den øverste etasjen altså neglisjerbar. I y -retning blir lastvirkningen på vindkryssene som følger:

$$\mathbf{H}_{vk,y} = \begin{bmatrix} 70 \\ 95 \\ 113 \\ 134 \end{bmatrix} kN. \quad (15.9)$$

Her er lastvirkningene i alle etasjene større enn de i ligning (11.12), og som i x -retning er differansen størst i den øverste etasjen. Den beregnes til henholdsvis 8, 3, 1 og 0.8 % i fjerde til første etasje. Det betyr at konsekvensene av å øke massen i den øverste etasjen i et bygg kun være store i umiddelbar nærhet av endringen. Årsaken finnes i tabell 15.5 som viser egensvingeperiodene og de effektive modale massene til modene vi benyttet i kombinasjonen. Sammenliknet med resultatene

Tabell 15.5: Egensvingeperioder og effektive modale masser for bygget i dette avsnittet. De effektive modale massene er angitt i prosent av den totale massen til bygget

k	T	m_{kx}	m_{ky}	m_{kz}
	s	%	%	%
1	1.072	84.9	0.0	0.0
2	0.767	0.0	84.6	0.0
4	0.354	12.1	0.0	0.0
5	0.252	0.0	12.3	0.0
7	0.214	2.4	0.0	0.0
9	0.167	0.0	0.0	56.2
11	0.152	0.0	2.4	0.0
13	0.137	0.0	0.0	3.7
15	0.116	0.0	0.0	4.2
29	0.092	0.0	0.0	20.8

i tabell 11.5 ser vi for det første at egensvingeperiodene er lengre, hvilket er en direkte konsekvens av at massen er større. Vi ser også at en del av den effektive modale massen er flyttet fra de første modene til de høyere modene, og det er årsaken til at endringene i lastvirkningene er størst øverst i bygget, se diskusjonen under figur 8.4. Man kan forledes til å tro at kreftene i vindkryssene skulle vært vesentlig mindre i de lavere etasjene i dette avsnittet enn i tilfellet med mer jevnt fordelt last over bygget, men her er det viktig å huske på at den effektive modale massen i tabellene er angitt i prosent av byggets totale masse. I analysen som ligger til grunn for tabell 15.5, er den totale massen større enn det som er tilfellet for tabell 11.5, og derfor vil den effektive modale massen til den første naturlige svingeformen i hver hovedretning være i samme størrelsesorden. Forskjellen i egensvingeperioden til den første moden, som er viktigst for lasten i den nederste etasjen, er for liten til å gi betydelige utslag i lastvirkningene.

Egensvingeperiodene i tabell 15.5 gjør det interessant å undersøke hvor stor betydning kryssledene i den komplette kvadratiske kombinasjonen har. I NS 3491-12 og eurokoden kreves det at en mer nøyaktig kombinasjonsregel enn SRSS benyttes når ligning (8.52) ikke er oppfylt. I utledningen av uttrykket for CQC er det derimot anbefalt at denne legges til grunn i tilfeller der ligning

(8.53) ikke er oppfylt. For egensvingeperiodene i tabell 15.5 krever regelverket altså at det tas hensyn til kryssledd mellom mode 11 og 9 samt 13 og 11. I utledningen til [18] anbefales det i tillegg å medta kryssleddene mellom mode 5 og 4, 7 og 5, 9 og 7, 15 og 13 samt 29 og 13. Siden bygget er dobbeltsymmetrisk vil ikke alle disse kryssleddene ha innflytelse på lastvirkningene i vindkryssene. Likevel er det interessant å undersøke hvor stor differansen blir hvis vi kun medtar de kryssleddene som regelverket krever. Da blir horisontallastene i vindkryssene som følger:

$$\mathbf{H}_{vk,x} = \begin{bmatrix} 87 \\ 119 \\ 145 \\ 172 \end{bmatrix} kN \quad \text{og} \quad \mathbf{H}_{vk,y} = \begin{bmatrix} 68 \\ 94 \\ 112 \\ 132 \end{bmatrix} kN. \quad (15.10)$$

Sammenliknet med ligning (15.8) undervurderes lastvirkningene i x -retning i ligning (15.10) med gjennomsnittlig 1.5 % mens lastvirkningene i y -retning sammenliknet med resultatet i ligning (15.9) er undervurdert med gjennomsnittlig 1.3 %. Forskjellene er altså neglisjerbare, og siden modal responsspekteranalyse i seg selv er en tilnærmet metode er avvik som forskjellen i ligning (8.52) og (8.53) gir, ikke viktig for resultatene. Men som nevnt under ligning (6.54), er det nesten ikke forskjell på tiden det tar å gjennomføre en komplett kvadratisk kombinasjon eller å beregne kvadratroten av summen av kvadratene.

15.8 Sammenlikning og diskusjon

Tabell 15.6 viser lengden på de første tre egensvingeperiodene i henholdsvis x - og y -retning til byggene i avsnitt 11.5, 15.2 og 15.4. Det er interessant å sammenlikne disse fordi de viser konsekvensene av å velge vindkryss, skiver leddet til dekkene og skiver som er momentstivt leddet til dekkene. Grunnen til at vi ikke har inkludert resultatene fra avsnitt 15.3 er at disse er nesten lik resultatene i avsnitt 15.2. I tabell 15.6 ser vi at det er større forskjell på egensvingeperiodene i x -enn i y -retning. Det kommer også frem at de naturlige svingeperiodene er kortest i tilfellet med

Tabell 15.6: De første tre egensvingeperiodene i henholdsvis x - og y -retning fra FEM-Design versjon 9 for bygget i figur 7.1 samt tilsvarende bygg med skiver. Der det står “-” har moden ikke kommet frem i analysen. De naturlige svingeperiodene er gitt i sekunder

Mode	Figur 7.1	HD m/ spenn i x -retning	Kontinuerlig plasztøpt
x-retning			
1	1.038	0.404	0.428
2	0.348	0.084	0.092
3	0.213	-	-
y-retning			
1	0.742	0.373	0.359
2	0.248	0.072	0.079
3	0.150	0.069	-

flatdekker. Siden hulldekker veier mindre enn massive betongdekker, betyr det at lastvirkningene er mye større i løsningen med flatdekker enn i løsningen med hulldekker. Det avspeiles i tabell 15.7, som viser forskjellen mellom skjærkraften i hver etasje fra avsnitt 15.2 og 15.4 i forhold til den vi kom frem til i avsnitt 11.5. Her ser vi at

Tabell 15.7: Forskjellene mellom skjærkraften i hver etasje fra dette kapitlet og de fra avsnitt 11.5. Differansen er angitt i prosent, og negativ verdi betyr at geometrien i dette kapitlet gir minst respons

Etasje	HD m/ spenn i x -retn.		Kontinuerlig plasstøpt	
	x -retning	y -retning	x -retning	y -retning
4	48	23	108	82
3	78	44	140	101
2	87	48	150	101
1	80	41	140	87

- Både bygget med hulldekker og det med flatdekker opplever vesentlig større lastvirkninger enn bygget i avsnitt 11.5 fordi betongskiver er stivere enn vindkryss
- Lastvirkningene er større i tilfellet med flatdekker enn i tilfellet med hulldekker. Det skyldes at flatdekker er både stivere og tyngre enn hulldekker
- Forskjellene er størst i x -retning av to årsaker. For det første bidrar de vertikale modene til lastvirkningene i vindkryssene i y -retning i avsnitt 11.5. Når vindkryssene erstattes av skiver i betong blir den horisontale komponenten fra de vertikale svingeformene mindre. For det andre er egensvingeperiodene mer like i y - enn i x -retning, se tabell 15.6
- Forskjellene mellom resultatene i avsnitt 11.5 og de i dette kapitlet er minst i de øverste etasjene. Begrunnelsen er at det er benyttet færre svingeformer i analysene med betongskiver, og siden de høyere modene har størst innvirkning på lastvirkningene i de øverste etasjene avspeiles det i resultatene

I avsnitt 15.5 benyttet vi oss av at skiver i betong er vesentlig stivere enn vindkryss. Vi modellerte et bygg med “soft story”, og diskuterte hvorfor denne geometrien er ekstremt uheldig. Deretter, i avsnitt 15.7 så vi at en øverste etasje som kun veier en brøkdel av de andre etasjene, har neglisjerbar innflytelse på lastvirkningene i et bygg. Tilsvarende har en tung øverste etasje stor innflytelse på lastvirkningene i de øverste etasjene, men også den ekstra lasten øverst i bygget har neglisjerbar innflytelse på vindkryssene i de nederste etasjene.

Kapittel 16

Torsjon

16.1 Innledning

Frem til nå har vi konsentrert oss om dobbeltsymmetriske bygg, der hver mode kun gir utslag i en horisontalretning. Det er svært få virkelige bygg som tilfredsstiller kravene eurokoden stiller for at de kan betraktes som regulære i plan. De må derfor modelleres i tre dimensjoner slik at det tas hensyn til torsjon.

Torsjon oppstår fordi stivheten og/eller massen ikke er dobbeltsymmetrisk fordelt over konstruksjonens plan. Siden effekten av de to er den samme, velger vi kun å ta for oss tilfellet der det er stivheten til bygget som ikke er dobbeltsymmetrisk fordelt i planet. Det gjør vi i avsnitt 16.2 ved å beregne lastvirkningene på et bygg som tilsvarer det i figur 7.1, bortsett fra at det ikke er vindkryss i akse 2, se figur 7.2. Vi undersøker også konsekvensene av en mindre forskyvning av stivhetsenteret. Til slutt tar vi for oss følgene av ikke å tilfredsstille regelverkets krav til antallet moder som inkluderes i responsspekteranalysen.

16.2 Ikke jevnt fordelt stivhet

Når en konstruksjon både opplever torsjon og translasjon i en mode, vil det kombinere to uheldige effekter. Torsjonen gir stor akselerasjon i delene som beveger seg mest, mens translasjonen bidrar til modens effektive modale masse. I dette avsnittet beregner vi lastvirkningene på et bygg som, bortsett fra at det ikke er vindkryss i akse 2, tilsvarer det i figur 7.1. Det betyr at den totale stivheten i y -retning halveres mens stivheten forblir uendret i x -retning. Vi skal se at torsjonsvirkningene har store konsekvenser for lastene.

Frem til nå har alle byggene vi har analysert vært dobbeltsymmetriske, og lastvirkningene i x -retning har derfor ikke vært påvirket av stivheten i y -retning. Nå er tilfellet et annet, og det med-

fører at en grunnakselerasjon i y -retning vil gi lastvirkninger i x -retning. Vi må derfor kombinere lastvirkningene i hovedretningene, og velger å benytte uttrykket i ligning (6.59) til dette.

Tabell 16.1 viser egensvingeperioder og tilhørende effektive modale masser for de første 15 modene. Vi ser at de naturlige svingeperiodene til modene med effektiv modal masse i y -retning er lengre enn i tabell 11.5, hvilket er en direkte konsekvens av at stivheten er mindre. Det kommer også frem at den effektive modale massen er fordelt mellom flere moder enn i de tidligere kapitlene. De effektive modale massene er fortsatt samlet i enten x - eller y -retning for hver mode. Det skyldes at bygget er symmetrisk i en hovedretning. Hadde vi flyttet vindkryssene i akse A til akse B, ville hver mode hatt effektiv modal masse i både x - og y -retning.

Tabell 16.1: Egensvingeformer med tilhørende naturlige svingeperioder og effektive modale masser for bygget uten vindkryss i akse 2. De effektive modale massene er angitt i prosent av den totale massen til bygget

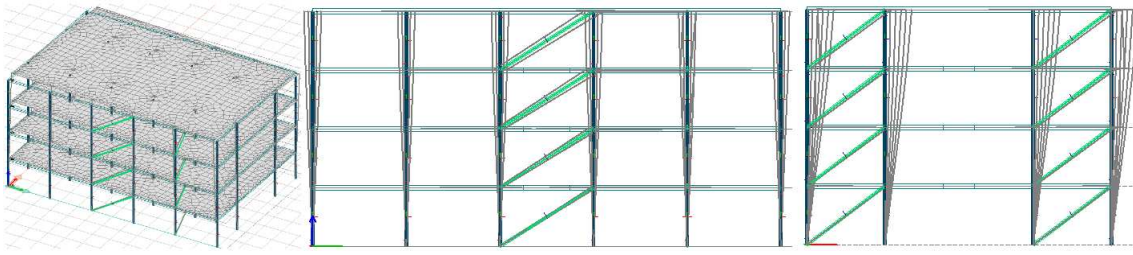
k	T	m_{kx}	m_{ky}	m_{kz}
	s	%	%	%
1	1.670	0.0	57.5	0.0
2	1.037	85.0	0.0	0.0
3	0.694	0.0	26.7	0.0
4	0.556	0.0	8.8	0.0
5	0.347	12.0	0.0	0.0
6	0.339	0.0	1.6	0.0
7	0.274	0.0	0.0	0.0
8	0.233	0.0	3.9	0.0
9	0.212	2.4	0.0	0.0
10	0.171	0.0	0.0	0.0
11	0.167	0.0	0.0	53.1
12	0.153	0.0	0.0	4.8
13	0.142	0.0	0.8	0.0
14	0.134	0.0	0.0	2.5
15	0.115	0.0	0.0	0.0

Den første moden er vist i figur 16.1. Her ser vi hvordan bygget vrir samtidig som dekkene forskyves i y -retning, og at alle vindkryssene, både de i x - og de i y -retning, tøyes i bevegelsen.

Den horisontale lasten på hvert vindkryss i x -retning blir

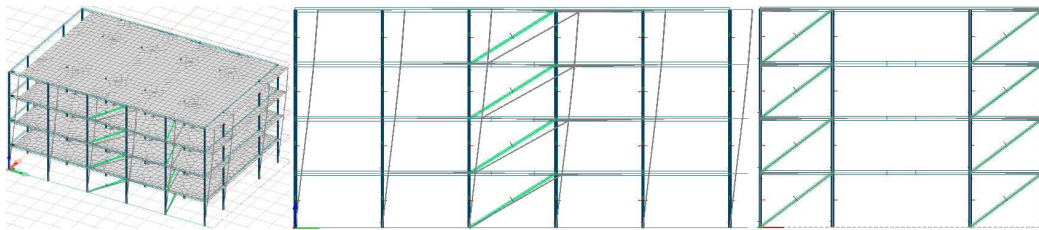
$$\mathbf{H}_{vk,x} = \begin{bmatrix} 127 \\ 181 \\ 220 \\ 266 \end{bmatrix} kN. \quad (16.1)$$

Disse lastene er vesentlig større enn de i ligning (11.11) selv om konstruksjonene er helt like i



Figur 16.1: Egensvingeformen til den første moden i tabell 16.1 vist i 3D (til venstre) samt oppriss. Det ses at alle vindkryss deformeres i denne svingeformen som angir torsjon og translasjon i y -retning

x -retning. Forskjellen er på henholdsvis 54, 53, 51 og 51 % i henholdsvis fjerde, tredje, andre og første etasje så innvirkningen av torsjon er nesten lik i alle etasjene. Den store forskjellen oppstår kun fordi vi har fjernet vindkryss i y -retning. Det er svært viktig å bemerke at modene som har effektiv modal masse i x -retning, nesten har samme egensvingeperiode i tabell 16.1 og 11.5. Differansen er neglisjerbar, og skyldes annerledes inndeling av elementnettet samt massen til vindkryssene i akse 2. Figur 16.2 viser egensvingeformen til den første moden med effektiv modal masse i x -retning. Her ser vi at den er fullstendig lik den første moden i x -retning for det dobbeltsymmetriske bygget, se figur 11.31. Tilfellet er det samme for de andre modene som gir skjærkraft i x -retning ved terreng, deres egenskaper tilsvarer de vi kom frem til i analysen der bygget var dobbeltsymmetrisk. De økte lastvirkningene i x -retning kommer altså av responsen fra modene med effektiv modal masse i y -retning.



Figur 16.2: Egensvingeformen til den andre moden i tabell 16.1 vist i 3d (til venstre) samt oppriss. Det ses at denne er til forveksling lik den første moden i x -retning i avsnitt 11.5

Den horisontale komponenten til kraften i hvert vindkryss i y -retning blir

$$\mathbf{H}_{vk,y} = \begin{bmatrix} 71 \\ 94 \\ 106 \\ 133 \end{bmatrix} kN. \quad (16.2)$$

Sammenliknet med resultatet i ligning (11.12) er kreftene i ligning (16.2) henholdsvis 11 og 3 % større i fjerde og tredje etasje, men 5 og 0.6 % mindre i andre og første etasje. Påvirkningene fra torsjon er altså langt mindre i y - enn x -retning. Grunnen til det er at den første egensvingeperioden med effektiv modal masse i y -retning er mer enn dobbelt så lang som for det dobbeltsymmetriske bygget, se tabell 11.5.

Virkelige bygg som skal dimensjoneres for seismiske lastvirkninger, er svært sjelden dobbeltsymmetriske. Stivheten er ofte samlet i et hjørne, og det gir store torsjonsvirkninger. Det er interessant å undersøke lastvirkningene i vindkryssene dersom eksentrisiteten er mindre enn i tilfellet vi akkurat har analysert. Resultatene vil gi oss innblik i hvor stor effekt det har å sette inn ekstra stivhet i et bygg som har stor avstand mellom stivhet- og massesenter. Vi gjennomfører derfor en analyse av det samme bygget, men tilføyer ett vindkryss i akse 2. De horisontale lastvirkningene i vindkryssene blir dermed

$$\mathbf{H}_{vk, x, begr. torsj.} = \begin{bmatrix} 97 \\ 140 \\ 169 \\ 200 \end{bmatrix} kN, \quad (16.3)$$

$$\mathbf{H}_{vk, y, akse 2, begr. torsj.} = \begin{bmatrix} 94 \\ 135 \\ 160 \\ 188 \end{bmatrix} kN \quad \text{og} \quad \mathbf{H}_{vk, y, akse 5, begr. torsj.} = \begin{bmatrix} 55 \\ 77 \\ 94 \\ 110 \end{bmatrix} kN. \quad (16.4)$$

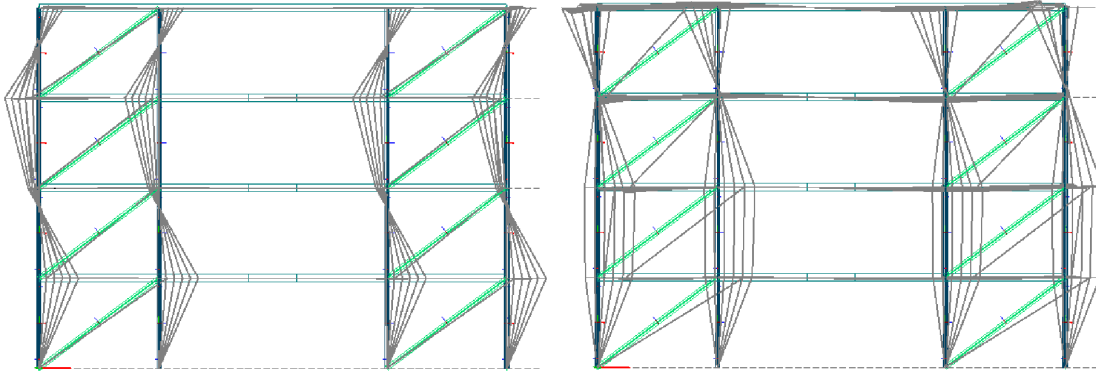
En sammenlikning av ligning (16.1) og (16.2) med ligning (16.3) og (16.4) viser at det ekstra vindkrysset reduserer lastvirkningene i akse 5, A og D drastisk. Differansen er på ca. 30 % i både x - og y -retning i alle etasjer. Lastvirkningene i ligning (16.3) og (16.4) er dermed mer like de i ligning (11.11) og (11.12) enn de i ligning (16.1) og (16.2). Det er viktig å huske på at det er brakt mer stivhet til systemet ved å tilføye et ekstra vindkryss. Det forkorter egensvingeperiodene, og siden disse tilhører det hastighetsensitive området i designspektret, øker det lastvirkningene. Den første moden med effektiv modal masse i y -retning til systemet med ett vindkryss i akse 2 har en egensvingeperiode på 0.947 s og effektiv modal masse på 64.5 % av byggets totale masse. I tabell 16.1 ser vi at de tilsvarende parametrene for systemet uten vindkryss i akse 2 er 1.670 s og 57.5 %. Differansen er altså stor. Grunnen til at det likevel er mindre lastvirkninger i ligning (16.3) og (16.4) enn i ligning (16.1) og (16.2) er at lasten i tilfellet med mindre eksentrisitet fordeles over flere vindkryss. Derfor er lastvirkningene i vindkrysset i akse 2 i ligning (16.4) vesentlig større enn lastvirkningene i vindkryssene i akse 5. Men de er mindre enn lastvirkningene i ligning (16.1). I mange bygg benyttes like komponenter i størst mulig grad fordi det er enkelt. Dersom alle vindkryssene i bygget skal være like, har det ekstra vindkrysset redusert de dimensjonerende lastvirkningene. Så i noen tilfeller kan økt stivhet gi mindre lastvirkninger selvom systemets dominerende moder er hastighetsensitive.

Den effektive modale massen i y -retning er mer jevnt fordelt mellom modene for konstruksjonen uten vindkryss i akse 2 enn det dobbeltsymmetriske i figur 7.1. Det kommer frem ved sammenlikning av tabell 11.5 og 16.1. Derfor benytter vi denne muligheten til å undersøke konsekvensene av ikke å ta hensyn til så mye effektiv modal masse som regelverket krever. Ifølge eurokoden skal summen av de effektive modale massene til de betraktete modene enten være større enn 90 % av konstruksjonens totale masse, eller alle moder med større effektiv modal masse enn 5 % av konstruksjonens totale masse skal tas med. Vi har i analysen vår inkludert alle modene med effektiv modal masse i tabell 16.1, men vi undersøker nå hvor mye annerledes resultatene blir hvis vi kun kombinerer de første fem modene, og dermed kun akkurat tilfredsstiller kravet i eurokoden.

Lastvirkningene blir

$$\mathbf{H}_{vk, x, 5 \text{ moder}} = \begin{bmatrix} 121 \\ 182 \\ 221 \\ 267 \end{bmatrix} kN \quad \text{og} \quad \mathbf{H}_{vk, y, 5 \text{ moder}} = \begin{bmatrix} 56 \\ 86 \\ 102 \\ 126 \end{bmatrix} kN. \quad (16.5)$$

Sammenliknet med resultatene i ligning (16.1) og (16.2), er lastene i ligning (16.5) nesten identiske i noen vindkryss mens avviket er større i andre. Siden høyere moder generelt har størst innvirkning øverst i bygget, er det ikke overraskende at det største avviket finnes i den øverste etasjen. Det er ikke så ille i x -retning der analysen med bare fem moder gir et resultat som er 5 % mindre enn det i ligning (16.1). I øverste etasje i y -retning er avviket derimot på hele 21 %. Det skyldes både mode 6 og 8, se figur 16.3, og de vertikale modene som vi tidligere har sett er viktige for vindkryssene i y -retning. For å få et korrekt lastbilde er det altså viktig å inkludere mest mulig effektiv modal masse i kombinasjonen, og ikke kun akkurat nok til å tilfredsstille kravene i regelverket.



Figur 16.3: Oppriss i y - z -plan av egsvingeformen til mode seks (til venstre) og 8 (til høyre) i tabell 16.1. Det ses at disse har innslag av torsjon og stor innvirkning på lastvirkningene i de øverste etasjene

Det kan for en del konstruksjoner være vanskelig å finne nok moder til å tilfredsstille kravet i regelverket. Det skal vi se eksempler på i kapittel 17. For å undersøke konsekvensene av dette, beregner vi nå lastvirkningene ved fullstendig kvadratisk kombinasjon av de første tre modene. Dermed inkluderer vi effektive modale masser som tilvarer henholdsvis 85 og 84 % av byggets totale masse i x - og y -retning. Resultatet er

$$\mathbf{H}_{vk, x, 3 \text{ moder}} = \begin{bmatrix} 74 \\ 138 \\ 182 \\ 203 \end{bmatrix} kN \quad \text{og} \quad \mathbf{H}_{vk, y, 3 \text{ moder}} = \begin{bmatrix} 35 \\ 64 \\ 83 \\ 92 \end{bmatrix} kN. \quad (16.6)$$

Sammenliknet med resultatene i ligning (16.1) og (16.2) er lastene i ligning (16.6) mye mindre. Forskjellene er størst i de øverste etasjene, men avviket er stort i alle etasjer. I dette avsnittet har vi altså sett at moder som kun har effektiv modal masse i y -retning, kan være av stor betydning for lastvirkningene i x -retning, og at moder med relativt liten effektiv modal masse også er utslagsgivende for responsen.

Kapittel 17

Opplagerbetingelser

17.1 Innledning

Opplagerbetingelsene til et bygg er ekstremt viktige for prosjekteringen, og lastvirkningene fra jordskjelv er et av forholdene som påvirkes. Opplagerbetingelsene avhenger av grunnforholdene og fundamenteringsprinsippet, og som nevnt i avsnitt 4.4 har de innvirkning på modenes egenskaper. Interaksjonen kalles “samvirke mellom grunn og konstruksjon”, og den påvirker systemet på følgende vis [3]:

1. Opplagerbetingelsene blir mer fleksible. Det benyttes derfor fjærer i stedet for faste opplagre. Fjærstivhetene er generelt store når grunnforholdene er faste, og små når jorden er myk, men de avhenger også av fundamenteringsmetoden
2. Dempningsforholdet endres fordi grunnen tar opp energi når den belastes over sin lineært elastiske grense gjentakende ganger. Innflytelsen samvirken har på dempningen avhenger av hvor stor effekt opplagerbetingelsene har på egensvingeperioden til bygget. Dersom egensvingeperiodene til bygget betegnes \tilde{T}_k , og T_k angir egensvingeperiodene til den samme konstruksjonen oppført direkte på fjell, avhenger dempningsforholdet av \tilde{T}_k/T_k

Som nevnt i avsnitt 3.5, vil endringen av dempningsforholdet vanligvis være gunstig. Samtidig er det vanskelig å inkludere det i beregningene fordi det medfører at dempningsforholdet til modene ikke er like, se ligning (3.29). I denne oppgaven har vi valgt å se bort fra påvirkningen grunnforholdene og fundamenteringsprinsippet har på dempningsmatrisen fordi forholdet \tilde{T}_k/T_k er nesten lik en i alle eksemplene våre, og det derfor har liten effekt. Samtidig er det i FEM-Design ikke mulig å gjøre ξ avhengig av modenummeret. Et siste argument for å se bort fra dette er uenighet om tolkning av regelverket. Det kommer vi tilbake til i avsnitt 18.3.

Noe som gjør det utfordrende å bestemme opplagerbetingelsene for den seismiske situasjonen, er at grunnens fasthet i noen tilfeller endres av rystelser. Det verste tilfelle er jord som kan gå i

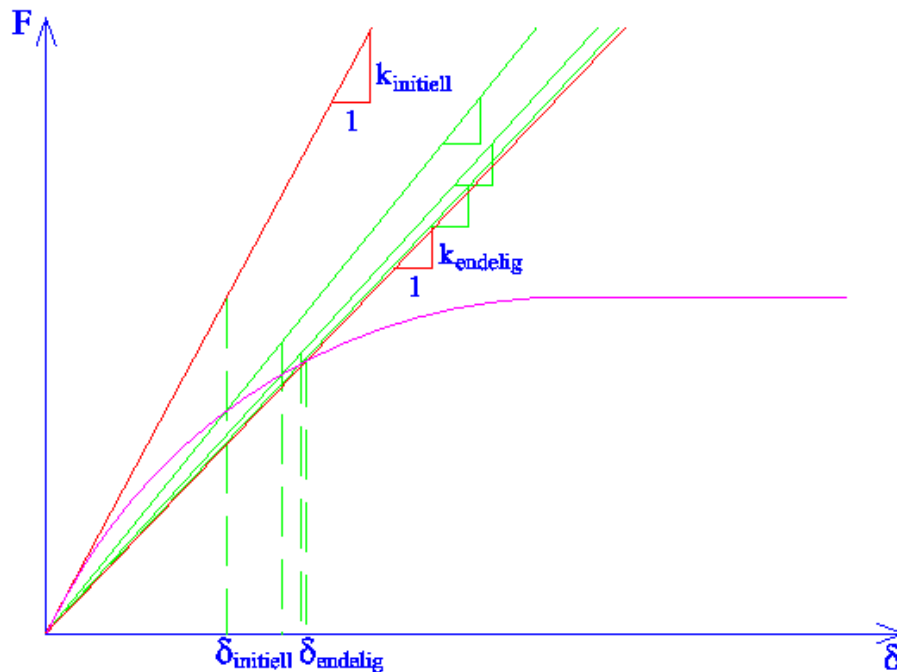
flytefase, men også mer gunstige løsmasser kan forandre egenskaper [32]. Spørsmålene hvorfor det skjer, og hvordan vi kan hindre eller ta høyde for det, tilhører et så stort fagfelt at det ikke er mulig å dekke dette i denne oppgaven. Derfor skal vi ikke gå inn på hvordan opplagerbetingelsene til et bygg bestemmes, men i stedet konsentrere oss om konsekvensene av disse. Det gjør vi ved å beregne lastvirkningene på et bygg som over terreng tilsvarer det i figur 7.1. Grunnforholdene og fundameteringsmetoden varieres, og i hvert avsnitt gir vi et eksempel på hva de kan tilsvare. Dekkene som inkluderes i modellene i dette kapitlet, men ikke er med i figur 7.1, belastes på samme vis som de øvrige dekkene, dvs. 500 N/m^2 i egenvekt og 900 N/m^2 i nyttelast.

Fleksible opplagerbetingelser gir lengre egensvingeperioder, og dermed i de fleste tilfeller mindre pseudoakselerasjon. Samtidig er fleksible opplagerbetingelser vanligvis knyttet til myke grunnforhold, og som vi så i avsnitt 4.3, gir det store lastvirkninger. I de tilfellene der opplagerbetingelsene ikke er stive nok til at vi kan se bort fra konstruksjonene under terreng, er vi nødt til å modellere kjelleren. Denne vil vanligvis utføres i betong, og derfor ha stor masse. Grunnet de fleksible opplagerbetingelsene, vil den svinge i forbindelse med jordskjelv. Det gir flere etasjer og en større total masse som medfører at det må tas hensyn til flere moder i beregningene, se avsnitt 8.3 og 8.4.

Det at en stor andel av byggets masse er samlet nederst i konstruksjonen medfører et problem som er svært vanlig innen jordskjelvsprosjektering. Egensvingeperiodene til modene som har effektiv modal masse i de horisontale retningene, blir så korte at dataprogrammet ikke finner dem. I analysen beregner vi 60 moder. Det er relativt mange, men i avsnitt 17.2 og 17.3 finner vi likevel ikke nok moder som har betydelige horisontale utslag. I kombinasjonen av lastvirkningene er det tillatt å benytte moder som gir en sum av effektive masser som er større enn 90 % av byggets totale masse, eller å sikre at ingen svingeformer med effektiv modal masse tilsvarende mer enn 5 % av den totale massen utelates fra kombinasjonen. I vår analyse kan dette ikke garanteres, og vi har ikke mulighet til å beregne flere svingeformer fordi utregningen blir for stor for datamaskinen. Løsningen finnes i punkt 4.3.3.3.1(5) i eurokoden som gjelder i tilfeller der de andre reglene ikke kan tilfredsstilles. Ifølge dette punktet skal det minste antallet svingeformer i kombinasjonen være større enn tre ganger kvadratroten av antallet etasjer i bygget, og den naturlige svingeperioden til den siste moden skal være kortere enn 0.20 sekunder. I avsnitt 16.2 argumenterte vi for viktigheten av å medta mest mulig effektiv modal masse i kombinasjonen. Vi skal se at negliseringen av de høyeremodene har store konsekvenser for resultatene i avsnitt 17.2.

Når samvirke mellom grunn og fundamenter er viktig for lastvirkningene, modelleres opplagerbetingelsene med fjærer som avhenger av grunnens egenskaper. I figur 5.15 så vi et last-forskyvningsdiagram av typen vi benytter for bygg. Løsmasser er lineært elastiske i et mye mindre område enn konstruksjoner, og vi er derfor nødt til å ta hensyn til en mer avansert sammenheng mellom last og forskyvning her. De fleste beregningsprogrammer, inkludert FEM-Design, kan ikke modellere ikke-lineære fjærer så vi må iterere for å finne den korrekte sekantfjærstivheten. Vi beregner altså fundamentenes forskyvning med fjærenes initialstivhet. Basert på denne forskyvningen finner vi nye sekantstivheter fra last-forskyvningsdiagrammet til grunnen. De nye fjærstivhetene legges inn i analysemodellen, vi beregner forskyvningen ved fundamentnivå og fortsetter slik til vi har konvergens. Prosedyren er illustrert i figur 17.1. Det er vanlig å avslutte iterasjonen når forandringen i stivhet er i størrelsesordenen 1 - 5 %, avhengig av hvor stor innflytelse stivheten har på resultatene. Konstruksjonene vi betrakter er dobbeltsymmetriske og relativt fleksible. Det betyr at de ikke blir hardt belastet av jordskjelv, og det har vist seg under utregningene at vi ikke trenger å itere i avsnitt

17.2 og 17.3. Men denne situasjonen er et unntak fra normalen siden de fleste bygg i Norge, som ikke går under utelatelseskriteriet i eurokoden, verken er dobbeltsymmetriske eller avstivet uten bruk av skiver.



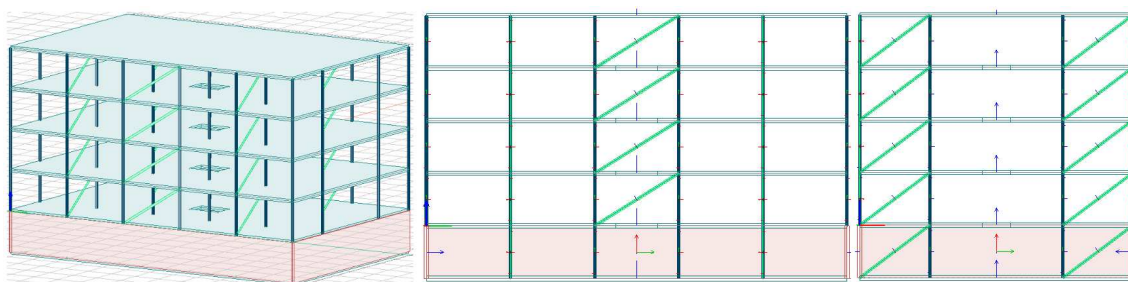
Figur 17.1: Iterasjonsprosedyre for å finne stivheten til en opplagerfjær. Når beregningene konvergerer har vi funnet den endelige fjærstivheten som kan benyttes i beregningene

Kjelleretasjen med både dekker og vegger i betong utgjør en betydelig økning i antallet frihetsgrader det må tas hensyn til i beregningen. I tillegg må det beregnes mange svingeformer fordi opplagrene nå er fordelt mer over konstruksjonen og det i seg selv gir opphav til en rekke egensvingeformer. For å få tilstrekkelig nøyaktige resultater, blir beregningen så stor at det ikke er mulig å gjennomføre den. Som nevnt i avsnitt 3.7, er resultatet av en modal analyse utført på datamaskin mest korrekt for de første modene. I dette kapitlet er alle byggene dobbeltsymmetriske, og det betyr at lasten i to vindkryss i samme retning og etasje skal være lik. Det er derfor relativt enkelt å se når resultatene i dataprogrammet ikke er korrekt, og særlig for de høyere modene skjer det en rekke ganger i dette kapitlet. I de tilfellene er det konsekvent benyttet den største lasten dataprogrammet finner fordi virkelige konstruksjoner skal dimensjoneres for det verste tilfellet.

Vi tar for oss et bygg med kjeller der vegger og bunnplate utføres i plaststøpt betong. Det er ingen peler, så både vertikal og horisontal fastholdning må modelleres med fjærstivhet på kjellerens overflater. I avsnitt 17.2 er grunnens stivhet relativt liten, og i avsnitt 17.3 er den større. Deretter, i avsnitt 17.4, ser vi på situasjonen der det er vertikale peler under bunnplaten. I avsnitt 17.5 diskuterer vi lastvirkningene når pelene under kjelleren er skrå, og i avsnitt 17.6 oppsummerer og sammenlikner vi resultatene våre.

17.2 Direktefundamentert kjeller på myke masser

Når et bygg fundamenteres direkte på løsmasser, må horisontale lastvirkninger tas av friksjon og jordtrykk. Friksjonen virker under bunnplaten samt langs kjellerveggene som er parallelle med bevegelsen. Jordtrykket virker vinkelrett på kjellerveggen som forskyves mot jorden. I dette avsnittet ser vi på et tilfelle der vi har en kjeller i betong med en bunnplate som ligger direkte på relativt myke masser, for eksempel leire. Grunnforholdene hører under klasse D i NS-EN 1998-1, som gir $S = 1.6$, $T_B = 0.15$ s og $T_C = 0.45$ s i ligning (8.89). Kjelleren er 3 meter dyp og vist i figur 17.2. Veggene er 250 mm tykke og bunnplaten er 300 mm høy. Alle betongkonstruksjonene er utført i betong type B30. Vindkryssene i akse 2 og 5 går helt ned til bunnplaten mens de i akse A og D avsluttes ved overkant kjellervegg.



Figur 17.2: Bygget som analyseres i avsnitt 17.2, 17.3 og 17.4 vist i 3D (til venstre) og oppriss

Fjærstivhetene er vist i tabell 17.1. Fjærene langs veggene påføres midt på disse, altså 1.5 meter under terreng. Jordtrykket virker som navnet angir, kun stabiliserende når kjelleren forskyves mot jorden. Det betyr at fjærene for jordtrykk ikke har stivhet ved strekk. Men det er som nevnt i avsnitt 17.1, ikke mulig å benytte ikke-lineære fjærer i den modale analysen i FEM-Design. Derfor må vi modellere fjærene for jordtrykk slik at de både tar strekk og trykk, og det betyr at de virker på begge sider av bygget samtidig. Det betyr at vi må halvere stivheten til hver av disse fjærene for at den totale stivheten skal bli korrekt. Det er den halverte stivheten som er angitt i tabellen. De første 60 modene beregnes, og de som har større effektiv modal masse enn 1 % av byggets totale masse, kombineres ved hjelp av CQC. Grunnen til at vi setter en nedre grense for størrelsen på den effektive modale massen er at vi dermed neglisjerer modene som kun gir skjærkraft ved terreng

Tabell 17.1: Initielle fjærstivheter til bygget i figur 17.2 omgitt av myke masser. De horisontale fjærstivhetene er angitt for hver vegg. For eksempel er det totale jordtrykket i x -retning lik $2 \cdot 15.6 \text{ m} \cdot 59 \text{ MN/m/m} = 1836 \text{ MN/m}$

Jordtrykk mot veggene i akse 1 og 6	59 MN/m/m
Jordtrykk mot veggene i akse A og D	53 MN/m/m
Friksjon langs veggene i akse 1 og 6	71 MN/m/m
Friksjon langs veggene i akse A og D	63 MN/m/m
Vertikalt trykk under bunnplaten	35 MN/m/m^2
Friksjon under bunnplaten	23 MN/m/m^2

pga. numeriske feil. Resultatet av kombinasjonen blir

$$\mathbf{H}_{vk,x} = \begin{bmatrix} 242 \\ 381 \\ 479 \\ 564 \end{bmatrix} kN \quad \text{og} \quad \mathbf{H}_{vk,y} = \begin{bmatrix} 171 \\ 280 \\ 358 \\ 414 \end{bmatrix} kN. \quad (17.1)$$

Som nevnt i avsnitt 17.1, er lastene så små at vi ikke må iterere. Når vi sammenlikner resultatet i ligning (17.1) med kreftene vi fant i ligning (11.11) og (11.12) kommer vi frem til at lastvirkningene med grunntype D gjennomsnittlig er over tre ganger større i både x - og y -retning. Forskjellen er størst i x -retning fordi opplagrene ifølge tabell 17.1 er stivere i x - enn y -retning. Altså er forskjellen på egensvingeperiodene i x -retning mindre enn i y -retning. Lange naturlige svingeperioder reduserer lastvirkningene fordi byggets mest innflytelsesrike moder tilhører det hastighetsensitive området i responsspektret, se figur 5.14. Så derfor er forskjellen størst i x -retning. Men det er enda et argument for dette, nemlig stivheten til kjellerveggene. De fungerer som skiver, og siden veggene i x -retning er lengre enn veggene i y -retning har de høyere modene lengre egensvingeperiode i y -retning enn i x -retning. Derfor er det flere moder med effektiv modal masse i y - enn x -retning som inkluderes i kombinasjonen. Det at vindkryssene i y -retning også står i kjelleren mens vindkryssene i x -retning avsluttes i første etasje har liten betydning fordi betongskiver er langt stivere enn vindkryss i stål. Tabell 17.2 viser modene som er benyttet i kombinasjonen. Her ser vi et bidrag til avik mellom resultatet fra CQC og tidshistorieanalyse som ikke har vært avgjørende i de foregående kapitlene. I utledningen av CQC antok vi at $T_i/T_j < 10$ for alle moder i kombinasjonen. I tabell 17.2 er $T_2/T_{60} = 14$. Eurokoden nevner ikke denne kilden til unøyaktigheter, så vi velger likevel å benytte CQC.

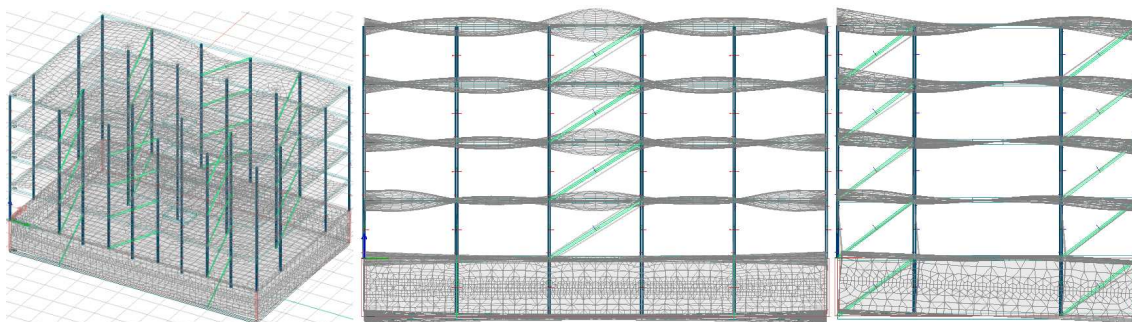
Tabell 17.2: Egensvingeperioder med tilhørende effektive modale masser for utvalgte moder til bygget som er direktefundamentert på myke masser. Det ses at de høyere modene har lengre naturlige svingeperioder i y - enn x -retning. Det er stor forskjell på egensvingeperiodene til de første og siste betydningsfulle modene

k	T	m_{kx}	m_{ky}	m_{kz}
	s	%	%	%
1	1.068	51.5	0.0	0.0
2	0.819	0.0	52.7	0.0
4	0.347	7.4	0.0	0.0
5	0.251	0.0	7.7	0.0
7	0.212	1.5	0.0	0.0
8	0.200	0.0	0.0	54.2
11	0.152	0.0	1.8	0.0
12	0.150	0.0	0.0	9.4
16	0.118	0.0	0.0	2.3
24	0.106	0.0	0.0	5.2

k	T	m_{kx}	m_{ky}	m_{kz}
	s	%	%	%
26	0.105	0.0	0.0	7.9
27	0.104	0.0	0.0	1.4
36	0.080	0.0	0.0	1.6
40	0.070	0.0	2.2	0.0
49	0.063	0.0	0.0	1.3
50	0.062	0.0	1.5	0.0
52	0.060	0.0	1.1	0.0
57	0.059	0.0	1.2	1.3
60	0.059	0.0	9.8	0.0

I tabell 17.2 ser vi tre andre interessante ting. For det første er de effektive modale massene til de første modene langt mindre enn i avsnitt 11.5. Forklaringen er at byggets totale masse nå er mye større på grunn av betongen i kjelleren. Siden veggene her er ekstremt stive, er deformasjonen liten

og det reduserer den effektive modale massen til de første modene. Det andre er at egensvingeperiodene til de første modene er lengre i tabell 17.2 enn i tabell 11.5. Her er forklaringen de fleksible opplagerbetingelsene. Det siste vi skal legge merke til er at flere av de høyere modene har effektiv modal masse i y -retning, men ingen har effektiv modal masse i x -retning. Her er det stivheten til de lange kjellerveggene i akse A og D som kommer frem. Figur 17.3 viser svingeformen til mode 40, den fjerde moden med effektiv modal masse i y -retning. Her ser vi både deformasjonen av oppleggsfjærene og av kjellerveggene.



Figur 17.3: Egensvingeformen til mode 40 i tabell 17.2 vist i 3D (til venstre) og oppriss. Bemerk deformasjonen av oppleggene og kjellerveggene i akse 1 og 6

17.3 Direktefundamentert kjeller på faste løsmasser

Dette avsnittet tar for seg den samme situasjonen som avsnitt 17.2, med den ene forskjellen at massene rundt kjelleren er stivere. Nå tilhører konstruksjonen grunntype B, hvilket vil si at $S = 1.25$, $T_B = 0.10\text{ s}$ og $T_C = 0.30\text{ s}$ i ligning (8.89). De initielle stivhetene er gitt i tabell 17.3. Disse er vesentlig høyere enn i tilfellet med mykere masser. En sammenlikning av de to tabellene viser at den vertikale stivheten ikke påvirkes i like stor grad av fastheten til grunnen som den horisontale. Vi skal se at differansen likevel er stor nok til å gi konsekvenser for resultatene. Som

Tabell 17.3: Initielle fjærstivheter til bygget i figur 17.2 omgitt av faste løsmasser

Jordtrykk mot veggene i akse 1 og 6	384 MN/m/m
Jordtrykk mot veggene i akse A og D	344 MN/m/m
Friksjon langs veggene i akse 1 og 6	463 MN/m/m
Friksjon langs veggene i akse A og D	414 MN/m/m
Vertikalt trykk under bunnplaten	49 MN/m/m^2
Friksjon under bunnplaten	231 MN/m/m^2

i avsnitt 17.2, beregnes de første 60 modene, og de som har større effektiv modal masse enn 1 % av byggets totale masse, kombineres ved CQC. Tabell 17.4 viser nøkkeltall for disse modene. Her ser vi tydelige forskjeller fra tilfellet med myke masser. For det første er egensvingeperiodene kortere i tabell 17.4 enn i tabell 17.2. For det andre er de effektive modale massene mindre fordi

Tabell 17.4: Naturlige svingeperioder med tilhørende effektive modale masser for utvalgte moder til bygget som er direktefundamentert på faste masser

k	T	m_{kx}	m_{ky}	m_{kz}
	s	%	%	%
1	1.055	51.1	0.0	0.0
2	0.783	0.0	51.6	0.0
4	0.346	7.2	0.0	0.0
5	0.249	0.0	7.3	0.0
7	0.212	1.4	0.0	0.0
8	0.187	0.0	0.0	44.9
11	0.150	0.0	1.5	0.0
12	0.142	0.0	0.0	5.8

k	T	m_{kx}	m_{ky}	m_{kz}
	s	%	%	%
16	0.117	0.0	0.0	2.0
25	0.104	0.0	0.0	1.8
26	0.099	0.0	0.0	2.0
28	0.095	0.0	0.0	2.2
29	0.094	0.0	0.0	7.3
33	0.086	0.0	0.0	1.1
38	0.076	0.0	0.0	1.7

fundamentet ikke forskyves like mye. Disse forskjellene er størst i z -retning selv om differansen til fjærstivhetene er størst i de horisontale retningene. Det kan skyldes at modene med effektiv modal masse i tabell 17.2 nesten ikke ga forskyvning av kjelleren. De horisontale modene som i stor grad påvirkes av fjærstivheten til grunnen, er ikke med i analysen, og derfor ser vi ikke forskjellen tydelig i de horisontale modene. Den siste viktige forskjellen mellom de medvirkende modene i analysene er at vi i tilfellet med faste masser kun finner tre moder som svinger i y -retning, mens vi i avsnitt 17.2 fant 8. Alle disse forskjellene skyldes økt stivhet ved opplagrene.

Lastvirkningene i vindkryssene over terreng blir

$$\mathbf{H}_{vk,x} = \begin{bmatrix} 140 \\ 204 \\ 249 \\ 301 \end{bmatrix} kN \quad \text{og} \quad \mathbf{H}_{vk,y} = \begin{bmatrix} 101 \\ 154 \\ 191 \\ 225 \end{bmatrix} kN. \quad (17.2)$$

Sammenlikning med resultatene i ligning (11.11) og (11.12) viser at lastene med grunntype B gjennomsnittlig er ca 70 % større i både x - og y -retning. Som i avsnitt 17.2, er forskjellen størst i x -retning fordi stivheten er større og veggene lengre i x -retning enn i y -retning. Forskjellene mellom lastene i ligning (17.2) og (11.11) øker fra øverste til nederste etasje, og også i forhold til resultatet i ligning (11.12) er differansen minst i de øverste etasjene. Forklaringen ligger i responsspektret til de to analysene. Siden T_C er større i avsnitt 17.3 enn i avsnitt 8.4, er differansen til pseudoakselerasjonene størst i det hastighetsensitive området. Lastvirkningene fra de høyere modene, som er viktigst i de øverste etasjene, er altså mer like enn lastvirkningene fra de første modene. Tendensen til at forskjellen er større jo høyere du kommer i bygget er tydeligst i x -retning fordi de to første modene i x -retning tilhører det hastighetsensitive området mens det kun er den første moden i y -retning som ikke er akselerasjons sensitiv.

17.4 Vertikale peler og jordtrykk

Forskjellen mellom situasjonen i dette avsnittet og den i avsnitt 17.2 er at det nå er vertikale betongpeler under bunnplaten. Pelenes tverrsnitt er kvadratisk med sidelengde 270 mm. Disse er plassert i krysningspunktene mellom aksene. Risikoen for at grunnen kan sette seg under bygget medfører at vi ikke kan benytte oss av friksjon under bunnplaten. De horisontale lastene må altså tas opp av jordtrykk og friksjon ved kjellerveggene samt bøyestivhet til og jordtrykk mot pelene. Bøyestivheten til pelene er utslagsgivende fordi pelene er delvis fastholdt mot rotasjon av dypereliggende masser. I den sammenhengen er det viktig om de er fast innspent eller leddet til bunnplaten. Det finnes en del uenighet blant geoteknikere om hvor vidt det er mulig å gjøre koblingen mellom bunnplaten og pelen rotasjonsfri. Den diskusjonen ligger utenfor rammene i denne oppgaven. Vi skal se på tilfellet der koblingen er tilnærmet rotasjonsfri, men regner med en liten stivhet fordi det i praksis alltid vil være en liten motstand mot rotasjon i en slik kobling. Den totale horisontale stivheten er mindre enn i avsnitt 17.2, og forskyvningene blir derfor så store at vi må iterere. Både de initielle og endelige fjærstivhetene er gitt i tabell 17.5.

Tabell 17.5: Initielle og endelige fjærstivheter til bygget i figur 17.2 omgitt av myke løsmasser og fundamentert på vertikale betongpeler P270

	Initiell stivhet	Sekantstivhet
Jordtrykk mot veggene i akse 1 og 6	59 MN/m/m	56 MN/m/m
Jordtrykk mot veggene i akse A og D	53 MN/m/m	46 MN/m/m
Friksjon langs veggene i akse 1 og 6	71 MN/m/m	67 MN/m/m
Friksjon langs veggene i akse A og D	63 MN/m/m	56 MN/m/m
Vertikal stivhet til hver pel	236 MN/m	236 MN/m
Stivhet i x -retning til hver pel	114 MN/m	108 MN/m
Stivhet i y -retning til hver pel	114 MN/m	100 MN/m
Rotasjonsstivhet om x - og y -akse til hver pel	21 MNm/radian	21 MNm/radian

De første 60 modene beregnes, og alle som har større effektiv modal masse enn 1 % av byggets totale masse, kombineres ved hjelp av CQC. Resultatet er

$$\mathbf{H}_{vk,x} = \begin{bmatrix} 247 \\ 387 \\ 485 \\ 572 \end{bmatrix} kN \quad \text{og} \quad \mathbf{H}_{vk,y} = \begin{bmatrix} 180 \\ 290 \\ 370 \\ 430 \end{bmatrix} kN. \quad (17.3)$$

Sammenliknet med tilfellet der bygget er direktefundamentert, se ligning (17.1), er lastene i ligning (17.3) litt større i begge hovedretninger og alle etasjer. I x -retning er lastene i ligning (17.3) 2.3, 1.5, 1.3 og 1.5 % større enn i ligning (17.1) i henholdsvis fjerde, tredje, andre og første etasje. I y -retning er de tilsvarende forskjellene på 5.1, 3.6, 3.4 og 4.1 %. Forskjellene er altså små, men størst i den øverste etasjen og i y -retning. Det virker rart at lastvirkningene er større i ligning (17.3) enn i (17.1) siden pelene gir mindre stivhet enn friksjon under bunnplaten. Det er totalt 24 peler under bunnplaten, hver med horisontal stivhet på 108 MN/m i x -retning og 100 MN/m i y -retning. Det gir en stivhet på 2592 MN/m i x -retning og 2400 MN/m i y -retning. I tabell

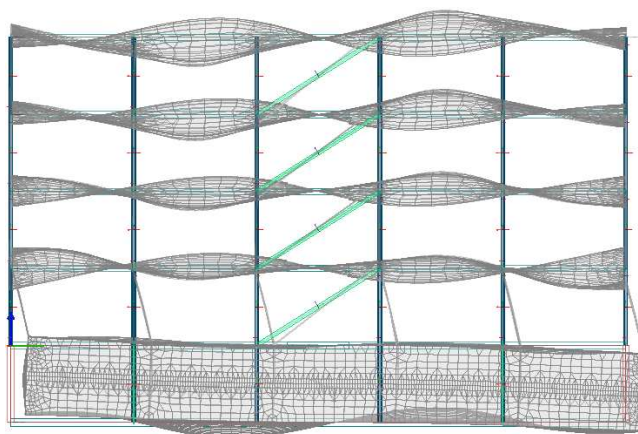
17.1 er det angitt en friksjonskraft på 23 MN/m/m^2 , og med en bunnplate på 374 m^2 gir det en stivhet på 8611 MN/m , altså mer enn tre ganger større enn i tilfellet med peler. I vertikal retning er stivheten ved direktefundamentering mer enn dobbelt så stor som stivheten med peler. Disse forskjellene avspeiles i egensvingeperiodene og burde gi mindre lastvirkninger i tilfellet med peler. Tabell 17.6 viser de naturlige svingeperiodene og effektive modale massene til modene som er inkludert i kombinasjonen. Her ser vi som forventet, at egensvingeperiodene generelt er lengre enn i tabell 17.2. Forklaringen på differansen i lastvirkningene ligger altså ikke her, men i de effektive modale massene. I tilfellet med direktefundamentering fant vi kun tre moder med effektiv modal masse i x -retning, men i tabell 17.6 er det fem, og de to “ekstra” modene har svært stor effektiv modal masse. I dette kapitlet er det ikke slik at de høyere modene er viktigst i de øverste etasjene. Siden bygget fastholdes med stive fjærer har modene som angir tøyning av fjærene, relativt korte egensvingeperioder. Det kommer frem av egensvingeformen til mode 43 som er vist i figur 17.4, og medfører at de to “ekstra” modene i x -retning i tabell 17.6 er mest utslagsgivende for lastene i den nederste etasjen. Derfor er forskjellen på lasten i ligning (17.3) og (17.1) også stor i første etasje. Det bør nevnes at pseudoakselerasjonen til de høyere modene i tabell 17.6 er forholdsvis stor. Hadde det vært mulig å beregne flere moder i avsnitt 17.2, ville den tilhørende pseudoakselerasjonen til disse vært mindre enn pseudoakselerasjonen til de høyere modene i tabell 17.6 fordi opplagrene er stivere og modene akselerasjonsensitive. De høyere modene ville altså hatt mindre innflytelse på resultatene i avsnitt 17.2 enn de har på ligning (17.3), den de ville likevel bidratt til å øke lastvirkningene.

Tabell 17.6: Egensvingeperioder med tilhørende effektive modale masser for utvalgte moder til bygget som er fundamentert på vertikale peler. Den effektive modale massen i y -retning til mode 43 skyldes en feil i analysen

k	T	m_{kx}	m_{ky}	m_{kz}
	s	%	%	%
1	1.073	51.5	0.0	0.0
2	0.809	0.0	52.5	0.0
4	0.350	7.6	0.0	0.0
5	0.252	0.0	8.1	0.0
7	0.214	1.6	0.0	0.0
8	0.211	0.0	0.0	60.7
11	0.160	0.0	0.0	9.4
12	0.152	0.0	1.9	0.0
16	0.120	0.0	0.0	4.1

k	T	m_{kx}	m_{ky}	m_{kz}
	s	%	%	%
21	0.111	0.0	0.0	1.0
23	0.108	0.0	0.0	4.4
26	0.105	0.0	0.0	8.2
33	0.091	0.0	0.0	1.2
36	0.081	0.0	0.0	2.2
42	0.070	0.0	29.5	0.0
43	0.069	24.1	1.3	0.0
45	0.068	0.0	4.1	0.0
46	0.067	13.1	0.0	0.0

Også i y -retning kan forskjellen mellom lastvirkningene i ligning (17.1) og (17.3) forklares ved at det er medtatt mer effektiv modal masse i beregningen med peler. Men det forklarer ikke hvorfor forskjellene mellom resultatene er markant større i y - enn x -retning. Begrunnelsen for det er som følger: I y -retning er egensvingeperioden til den første moden lengre i tabell 17.6 enn i tabell 17.2 fordi vindkryssene i y -retning går helt ned til bunnplaten. Derfor overføres lastvirkningene fra vindkryssene direkte til bunnplaten. Den totale vertikale stivheten er større for det direktefundamenterte bygget enn for det som står på peler. Men akkurat i aksekryssene gir pelene stor stivhet, og motstanden mot lokal vertikal translasjon av søylene på bunnplaten blir derfor større. I tilfellet



Figur 17.4: Den fjerde naturlige svingeformen med effektiv modal masse i x -retning for tilfellet med vertikale peler og myke masser. Det ses at denne moden har stor innvirkning på vindkryssene i x -retning i første etasje. Svingeformen er ikke vist i 3D eller y - z -plan fordi det er opprisset i x - z -planet som viser deformasjonen av vindkryssene

med direktefundamentering er den vertikale deformasjonen under aksekryss 2 og 5/B og C 0.45 mm. I tilfellet med peler er den derimot kun 0.38 mm. Så selv om den totale vertikale stivheten er større i tabell 17.1 enn i tabell 17.5, deformeres bunnplaten mer av den første moden med effektiv modal masse i y -retning i tabell 17.2 enn i tabell 17.6. Stivheten pelene gir under vindkryssene i y -retning reduserer altså egensvingeperiodene i y -retning, og det bidrar til økte lastvirkninger. Derfor er forskjellen mellom resultatene i ligning (17.1) og (17.3) størst i y -retning.

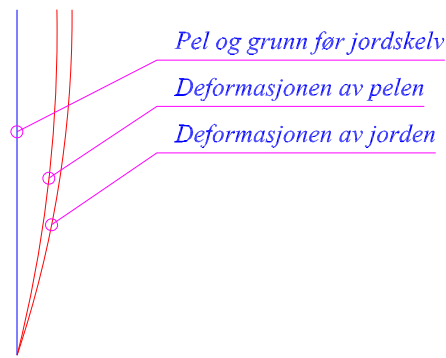
17.5 Skrå peler

I Norge er det tradisjon for å benytte skråstilte peler. Men i forbindelse med lastvirkninger fra grunnakselerasjon er det stor risiko for at peler som ikke er vertikale, vil knekke. I NS-EN 1998-5 har kompleksiteten rundt dette medført at det under punkt 5.4.2(5) direkte anbefales å unngå skråpeler [43]. Der står

Inclined piles are not recommended for transmitting lateral loads to the soil.

I dette avsnittet skal vi diskutere bakgrunnen for dette.

Peler vil i forbindelse med jordskjelv belastes av to forskjellige former for påvirkning, treghetspåvirkning og kinematisk påvirkning [29, 43]. Treghetspåvirkningen skyldes krefter som overføres fra konstruksjonen til pelene. Disse er ikke mindre gunstige for skråpeler enn for vertikale peler. Kompleksiteten skyldes derimot de kinematiske effektene som oppstår når pelene ikke beveger seg på samme vis som jorden. Figur 17.5 illustrerer dette. Dersom pelene er fleksible, vil deres forskyvning tilsvare forskyvningen til jorden og de kinematiske effektene blir små. Men hvis pelene er stive, vil de ikke forskyves like mye som løsmassene. Dermed vil jorden gi horisontale laster



Figur 17.5: Kinematisk påvirkning oppstår når pel og grunn ikke forskyves likt

på pelene mens den presses forbi. Dess stivere pelene er, dess større blir de kinematiske effektene. Påkjenningen blir spesielt stor dersom grunnen består av forskjellige typer løsmasse og jord. I overgangen mellom to lag kan det utvikles ekstreme bøyespenninger i pelen fordi den presses i motsatte retninger i de to lagene [29]. I figur 1.1 er The Imperial County Services Building vist. En årsak til skadene på dette bygget var en feilvurdering av stivheten til skråstilte peler [32].

Årsaken til at skrå peler er mye brukt i Norge er at de er svært stive i horisontal retning. Men med hensyn på kinematiske effekter er denne stivheten ugunstig og lastvirkningene kan bli store lokalt på pelene. Derfor bør skrå peler unngås når seismiske lastvirkninger er dimensjonerende.

17.6 Sammenlikning og diskusjon

Resultatene fra dette kapitlet er oppsummert i tabell 17.7. I hvert avsnitt har vi diskutert forskjellene mellom disse utførlig. Her fokuserer vi i stedet på de store linjene. Hvis vi begynner med å sammenlikne lastene fra de direktefundamenterte konstruksjonene er konklusjonen tydelig. Grunntype D gir mye større lastvirkninger enn grunntype B. Når vi igjen sammenlikner med resultatene fra avsnitt 8.4 ser vi at grunntype B er værre enn grunntype A. Basert på diskusjonene i avsnitt 4.3 er resultatene ikke overraskende, og de viser hvor viktig det er med en utførlig undersøkelse av grunnforholdene før grunntypen velges.

Tabell 17.7: Den dimensjonerende horisontallasten fra avsnitt 17.2, 17.3 og 17.4. Lastene er gitt i kN

Etg.	Direktefundamentert				Vertikale peler	
	Grunntype D		Grunntype B		Grunntype D	
	<i>x</i> -retn.	<i>y</i> -retn.	<i>x</i> -retn.	<i>y</i> -retn.	<i>x</i> -retn.	<i>y</i> -retn.
4	242	171	140	101	247	180
3	381	280	204	154	387	290
2	479	358	249	191	485	370
1	564	414	301	225	572	430

Går vi videre til å sammenlikne lastene fra byggene med henholdsvis peler og direktefundamentering på myke masser, ser vi at lastene er litt større i tilfellet med peler. I x -retning var pelenes stivhet mindre enn stivheten fra friksjon og jordtrykk under bunnplaten. Så egentlig burde lasten vært minst i tilfellet med peler. Men i analysen i avsnitt 17.4 inngikk det så mye mer effektiv modal masse i de horisontale retningene enn i analysen i avsnitt 17.2 at lastvirkningene ikke avspeiler dette. Det illustrerer viktigheten av å inkludere mest mulig effektiv modal masse i analysene. Pelers stivhet er svært avhengig av utformingen på pelene. I bygg med store vertikallaster trengs det pelegrupper som vil gi store stivheter både vertikalt og horisontalt. Samtidig vil peletypen ha innvirkning på stivheten. En stålkjernepel har ikke de samme egenskapene som en betongpel. Det er altså ikke på bakgrunn av resultatene i avsnitt 17.2 og 17.4 mulig å konkludere at vertikale peler og direktefundamentering alltid vil gi nesten like lastvirkninger. Men det at forskjellen i resultatene er relativt liten er interessant, for det viser at valget mellom peler og direktefundamentering i dette tilfellet ikke er av stor betydning for resultatene.

Kapittel 18

Duktilitet og dempning

18.1 Innledning

Frem til nå har de viktige aspektene vi har undersøkt handlet om geometri. Et unntak er opplagerbetingelsene i avsnitt 17 som handler om valg av fundamenteringssystem, men også her er det et innslag av geometri i form av om bygget har kjeller eller ikke. Duktilitet og dempning tilhører en annen kategori av viktige aspekter. Disse parametrene påvirkes mer av hvordan vi utfører arbeidene enn den egentlige geometrien. For eksempel påvirkes duktiliteten til en betongkonstruksjon av hvor hardt den armeres. I kapittel 5 så vi at en konstruksjons duktilitet og dempning er avgjørende for belastningen den må kunne motstå i forbindelse med jordskjelv. Men disse egenskapene kommer som en konsekvens av hvilket materiale konstruksjonen bygges i, hvilke grunnforhold den fundamenteres i og hvor hardt den utnyttes. Det er relativt enkelt å vurdere om torsjon er viktig for den seismiske responsen til et bygg, eller om det bør tas hensyn til samvirke mellom grunn og konstruksjon. Det er vesentlig vanskeligere å vurdere duktilitets- og dempningsfaktoren til en konstruksjon, siden disse avhenger av mange faktorer. Det skal vi se nærmere på i dette kapitlet. Vi begynner med duktilitet i avsnitt 18.2 og går over til dempning i avsnitt 18.3.

18.2 Duktilitet

Regelverkene NS 3491-12 og NS-EN 1998-1 behandler ikke temaet duktilitet likt. I NS 3491-12 er det faktoren k_Q i ligning (8.37) som tar hensyn til plastisk deformasjon. Her står det at en kan velge k_Q lik 0.25 for bygg avstivet med stålrammer, 0.33 for bygg med rammer og skiver i betong eller fagverk i tre og 0.50 for bygg i murverk eller med rammer i tre. Dersom duktiliteten ikke dokumenteres velges $k_Q = 0.7$ slik vi har gjort i de tidligere kapitlene. Det er ikke beskrevet hvordan duktiliteten skal dokumenteres, men det har vært vanlig å benytte reglene i eurokoden til denne dokumentasjonen. Disse er relativt omfattende, og behandles ikke her. I eurokoden er duktilitet behandlet mer utførlig, og innflytelsen baseres på valget av konstruksjonsfaktor, q , se

ligning (8.89). For bygg i betong er $1.5 \leq q \leq 3.6$ avhengig av geometri og armering mens konstruksjonsfaktoren for bygg i stål enten er lik 1.5, 2 eller 4 avhengig av bæresystem og detaljer ved knutepunkter. I avsnitt 15.5 så vi at bygg med fleksible etasjer får svært uheldige lastvirkninger i forbindelse med jordskjelv. Dette er et eksempel på bæresystem der vi ikke kan velge $q > 1.5$ fordi plastiske ledd vil utvikles øverst og nederst i den fleksible etasjen, og bygget dermed vil kollapse. Som nevnt i avsnitt 8.4, stilles det ikke krav til dokumentasjon av byggets duktilitet når vi velger $q = 1.5$. Hvis vi skal utnytte duktiliteten i større grad må denne påvises, hvilket er tidkrevende. Derfor anbefales det først å gjennomføre en beregning med $q = 1.5$ og undersøke om lastvirkningene er store sammenliknet med lasten fra vind og skjevstilling. Er de det, kan vi gå videre til å prosjektere duktilt.

I figur 5.19 ses det at økt duktilitet vil ha størst effekt for systemer som ikke har svært korte egensvingeperioder. De naturlige svingeperiodene til de innflytelsesrike modene er for de fleste bygg så lange at duktilitetsfaktoren er helt avgjørende for de seismiske lastvirkningene, og en endring fra $q = 1.5$ til $q = 4$ i ligning (8.89) vil derfor ha stor innflytelse på de dimensjonerende lastene.

18.3 Dempning

I tabell 3.1 så vi at dempningsforholdet til stål ligger i området 2 til 7 %, mens det for plasstøpt betong kan variere fra 3 til 10 %. Dempningen er minst når konstruksjonen er lite utnyttet, hvilket er tilfellet når den er elastisk. Siden vi i Norge vanligvis benytter en duktilitetsfaktor på ca. 1.5, vil konstruksjonene her i landet hovedsakelig være elastiske i forbindelse med større jordskjelv. Det taler for å benytte lave dempningsforhold i dimensjoneringen. Likevel har NS-EN 1998-1 fastsatt i punkt 3.2.2.2(4) at det kun skal brukes et annet dempningsforhold enn 5 % i

spesielle tilfeller (... der) denne verdien er gitt i den aktuelle delen av NS-EN 1998.

Det er altså ikke tillatt selv å vurdere dempningsforholdet. NS 3491-12 gir mer frihet på dette området. Her står det under punkt 4.2 at

ξ kan normalt settes lik 5 % som gir $\eta = 1.0$.

NS 3491-12 tillater altså å benytte andre verdier av dempningsforholdet, men $\xi = 0.05$ anbefales. Forskjellen mellom reglene i eurokoden og NS 3491-12 på dette punktet er særlig viktig når samvirke mellom grunn og fundamenter har stor innflytelse på responsen. I henhold til NS 3491-12 kan vi utnytte dempningen fra grunnen. Valget er vanskeligere i henhold til eurokoden. Her står det direkte at det alltid skal benyttes et dempningsforhold på 5 %. Samtidig stilles det også krav om å ta hensyn til samvirke mellom grunn og konstruksjon der det har stor innflytelse på resultatene. Dempningen fra grunnen er en konsekvens av samvirke. Utgiveren av eurokoden, Standard Norge, har uttalt at de er klar over at det er behov for en utdypning av reglene for dempning, og

at de inntil videre anbefaler å utvise forsiktighet i tolkningen av regelverket. Bl. a. derfor har vi i denne oppgaven valgt å se bort fra grunnens bidrag til dempningen.

Det ville vært naturlig å benytte høyere dempningsforhold når bygget prosjekteres duktilt, altså større ξ med større q og k_Q . Det gjør verken NS 3491-12 eller NS-EN 1998-1, men det er sannsynlig at prosedyrene vil endres i fremtiden.

I Ansys er det mulig å gi komponentene i et bygg ulik dempningsgrad i den modale analysen, slik at dempningsgraden til hver mode blir forskjellig. Det betyr at faktoren η i ligning (8.38) blir forskjellig for hver mode. Dessverre er det to ulemper med metoden. For det første er det ikke mulig å benytte resultatene i en responsspekteranalyse etterpå så kombinasjonen av responsene må gjøres for hånd. For det andre må den materialavhengige dempningen angis som en andel av stivhetsmatrisen. Det vil si at dempningsforholdet for hvert materiale avhenger av egensvingeperioden. Siden dempningsforholdet konsekvent antas lik 5 % i eurokoden, kan materialavhengig dempning ikke benyttes til konstruksjoner som prosjekteres nå, men det kan være aktuelt i forbindelse med tidshistorieanalyse av bygg der det tas hensyn til samvirke mellom grunn og konstruksjon. Grunnens dempning vil vanligvis være vesentlig større enn byggets (i størrelsesordenen $0.15 \leq \xi \leq 0.20$), så denne sammenhengen er viktig [8]. Tidshistorieanalyse utføres fortsatt ganske sjelden fordi det er svært tidkrevende, men etterhvert som datautviklingen fortsetter, vil dempningsens innflytelse på resultatene sannsynligvis blir mer detaljert behandlet i fremtidige regelverk.

Kapittel 19

Diskusjon og konklusjon

Laster som bygg skal dimensjoneres for, virker vanligvis på konstruksjonens fasader eller dekker. Nyttelast, vindlast og egenvekt er eksempler på dette. Men seismiske lastvirkninger derimot, opptrer fordi energi transporteres i form av rystelser fra grunnen til konstruksjonen. Rystelsene forplanter seg gjennom byggets avstivende komponenter, og får massen i bygget til å akselerere. Dermed oppstår treghetskrefter. Dersom bygget har stor evne til å absorbere energien fra rystelsene, vil lastvirkningene bli mindre fordi massenes akselerasjon reduseres. Plastisk deformasjon tar opp energi, og derfor er byggets evne til å deformeres permanent avgjørende for størrelsen på de seismiske lastvirkningene.

Som nevnt, oppstår lastvirkningene fra jordskjelv på grunn av byggets stivhet og masse. I tråd med dette har vi i denne oppgaven sett at det er avgjørende for belastningen hvor stivt og tungt bygget er, men også hvordan stivheten og massen er fordelt. Siden rystelsene kommer fra grunnen, er grunnforholdene også av svært stor betydning for lastvirkningene. De nevnte parametrene innflytelse kan oppsummeres som følger:

- Relativt stor stivhet gir store lastvirkninger
- Stor masse gir store treghetskrefter og dermed også store lastvirkninger. Men stor masse i forhold til stivhet gir også lengre egensvingeperioder, hvilket i de fleste tilfeller begrenser treghetskrefte
- Dårlige grunnforhold, dvs. dype, myke masser, filtrerer og forlenger grunnakselerasjonen slik at lastvirkningene blir store
- Stor duktilitet gir mindre lastvirkninger

Vi har sett på en rekke analysemetoder, og hovedsakelig benyttet modal analyse der reponsen til bygget beregnes ved hjelp av moder. Ut fra teorien om stokastiske vibrasjoner, har vi vist at moder med lange egensvingeperioder har størst innflytelse på lastvirkningene. Her så vi også at moder med tilnærmet like egensvingeperioder har sine største utslag i samme tidsperiode. Det

betyr at det er stor sannsynlighet for at to moder med nesten lik naturlig vinkelfrekvens har store utslag samtidig. For moder med relativt forskjellige egensvingeperioder vil den ene ha sitt største utslag mens den andre med all sannsynlighet er neglisjerbar. En konstruksjon har uendelig mange naturlige svingeformer. Men ved først å forenkle konstruksjonen til et system med endelig mange frihetsgrader, for deretter kun å kombinere responsen til modene med lange egensvingeperioder, finnes lastvirkninger som er tilstrekkelig nøyaktige.

Forløpet til grunnakselasjonen er vanskelig, og i noen tilfeller helt umulig, å forutsi. Dette medfører usikkerhet i beregningen av de dimensjonerende lastvirkningene, samtidig som kompleksiteten i problemstillingene gir behov for forenklede metoder til å anslå lastvirkningene. Responsspekteranalyse av flerfrihetsgradsystemer er et eksempel på en slik tilnærmet metode som benyttes mye fordi den er effektiv. I denne oppgaven er også tidshistorieanalyse for vurdering av de seismiske lastvirkningene på en konstruksjon beskrevet, men det er responsspekteranalysen som er benyttet fordi den i tillegg til å være rask også er sentral i gjeldende norsk regelverk. Vi har basert oss på generaliserte en-frihetsgradsystemer samt modal analyse med forskjellig detaljeringsgrad. I analysen av generaliserte en-frihetsgradsystemer utnyttes det at den første moden vanligvis har størst innflytelse på responsen. Her kom vi frem til resultater som for de fleste responsparametre lå innenfor $\pm 10\%$ av resultatene fra modal analyse. Avviket ble mindre når en forenklet svingeform ble lagt til grunn for analysen enn når den naturlige svingeformen til den første moden ble benyttet. Det skyldes at den forenklede svingeformen er utviklet for å ta hensyn til bidragene fra høyere moder, og det viste seg at parabelen i NS 3491-12 beskrev lastvirkningene bedre enn den lineære formen i NS-EN 1998-1.

Til de modale analysene benyttet vi håndberegning samt programmene Ansys og FEM-Design. Vi så at flere frihetsgrader generelt gir resultater som tilsvarer mindre lastvirkninger, og at eurokoden gir større lastvirkninger enn NS 3491-12. Eurokoden stiller samtidig krav om å ta hensyn til flere faktorer og er derfor mer omfattende.

Vi har i denne oppgaven undersøkt hvilke aspekter som er av betydning for bygg som utsettes for grunnakselasjon. Antallet etasjer har relativt liten innflytelse på lastvirkningene. Høye bygg har større masse, så de blir litt hardere belastet enn lave bygg. Men høye bygg er i de fleste tilfeller også mer fleksible enn lave bygg, og det reduserer lastvirkningene slik at økningen i belastning ved å bygge på en etasje ikke er like stor som økningen i masse.

En enkel planløsning og kontinuerlig stivhet over etasjene gir bedre kapasitet ved jordskjelv. En enkel planløsning, med stivhet og masse jevnt fordelt, begrenser torsjonen bygget ellers vil utsettes for. I den sammenhengen er dobbeltsymmetri å foretrekke, men konsekvensene av mindre avvik fra symmetrien er ikke vidtrekkende. Store variasjoner i stivheten i tilstøtende etasjer er svært lite gunstig når den øverste av de to etasjene er stivest. Årsaken er at det vil gi store lastvirkninger i den mest fleksible etasjen. Dette fenomenet, som kalles "soft story", er ofte aktuelt i kontor- og leilighetsbygg med parkeringskjeller eller butikker i den nederste etasjen.

Når det kommer til fundamentering bør skråstilte peler så vidt mulig unngås. Det skyldes at skråpeler er stive, og derfor ikke vil deformeres like mye som løsmassene de er omgitt av. Konsekvensen er at jorden vil presses forbi pelene, og det kan gi svært store bøyepenninger lokalt som kan føre til brudd. Det vil altså være vanskelig å bygge om eller på eksisterende konstruksjoner som har

komplisert planløsning, “soft story” eller skråstilte peler.

Som vi nettopp har diskutert, er relativt enkle konstruksjoner generelt å foretrekke med tanke på dimensjonering for jordskjelv. Det skyldes at fordelingen av krefter og opptaket av energi i konstruksjonen er vesentlig enklere å analysere dersom den er regulær i plan og oppriss [15].

Både eurokoden og NS 3491-12 bærer tydelig preg av at vi fortsatt er avhengig av forenklede metoder når vi skal dimensjonere for seismiske lastvirkninger. Eksempler er at eurokoden angir dempningsforholdet til alle konstruksjoner lik 5 % uavhengig av materialvalg og utnyttelsesgrad. Et annet eksempel er at duktilitetsfaktoren for konstruksjoner i stål ikke beregnes men velges. Dette er viktige forhold som det i dag legges lite arbeid i å bestemme. I fremtiden vil regelverkene etter all sannsynlighet bli mer spesifikke og detaljerte. For konstruksjoner av stor betydning etter et jordskjelv, vil det antakeligvis stilles krav om at duktilitetsfaktor og dempningsforhold skal påvises, ikke velges. Det vil også bli mer vanlig med tidshistorieanalyse etter hvert som dataverdenen utvikles. Dermed vil resultatene bli mer korrekte, men usikkerheten rundt forløpet til fremtidige grunnakselerasjoner vil fortsatt utgjøre en utfordring. I skrivende stund legges det verden over mye arbeid i å videreutvikle forenklede metoder som MPA. Disse vil antakeligvis bli dominerende innen få år, også i områder som Norge, der sterke jordskjelv ikke opptrer ofte. Det skyldes at de dimensjonerende seismiske lastvirkningene på et bygg avhenger av så mange parametre, så som grunnforhold, geometri og materialvalg, at de i noen tilfeller kan bli vesentlig større enn lastvirkningene fra andre naturlaster.

Tillegg A

Beregninger

A.1 Vedlegg til avsnitt 8.5 - NS-EN 1998-1 og løsmasser

I NS-EN 1998-1 gir grunnforholdene $S = 1.25$, $T_B = 0.10$ s og $T_C = 0.30$ s. Innsatt i ligning (8.89) med egensvingeperiodene fra ligning (8.20) gir det

$$S_{ed\ NS-EN\ 1998-1}(T_{1x}) = a_g S \frac{2.5 T_C}{q T_{1x}} = 0.744 \cdot 1.25 \cdot \frac{2.5 \cdot 0.30}{1.5 \cdot 0.936} m/s^2 = 0.50 m/s^2, \quad (A.1)$$

$$S_{ed\ NS-EN\ 1998-1}(T_{2x}) = a_g S \frac{2.5 T_C}{q T_{2x}} = 0.744 \cdot 1.25 \cdot \frac{2.5 \cdot 0.30}{1.5 \cdot 0.323} m/s^2 = 1.44 m/s^2, \quad (A.2)$$

$$S_{ed\ NS-EN\ 1998-1}(T_{3x}) = a_g S \frac{2.5}{q} = 0.744 \cdot 1.25 \cdot \frac{2.5}{1.5} m/s^2 = 1.55 m/s^2, \quad (A.3)$$

$$S_{ed\ NS-EN\ 1998-1}(T_{4x}) = a_g S \frac{2.5}{q} = 0.744 \cdot 1.25 \cdot \frac{2.5}{1.5} m/s^2 = 1.55 m/s^2. \quad (A.4)$$

De maksimale tilsvarende statiske lastene finnes fra ligning (3.32), (3.33), (8.9), (8.21), (8.23) og (8.24), der pseudoakselerasjonen fra ligning (A.1) til (A.4) benyttes.

$$\mathbf{F}_{1x, maks\ NS-EN\ 1998-1} = [173 \quad 162 \quad 121 \quad 65]^T kN, \quad (A.5)$$

$$\mathbf{F}_{2x, maks\ NS-EN\ 1998-1} = [-135 \quad -7 \quad 137 \quad 142]^T kN, \quad (A.6)$$

$$\mathbf{F}_{3x, maks\ NS-EN\ 1998-1} = [53 \quad -68 \quad -33 \quad 82]^T kN, \quad (A.7)$$

$$\mathbf{F}_{4x, maks\ NS-EN\ 1998-1} = [-13 \quad 31 \quad -33 \quad 21]^T kN. \quad (A.8)$$

Den maksimale skjærkraften i hver etasje fra hver mode finnes fra de tilsvarende statiske lastene i

ligning (A.5) til (A.8),

$$\begin{aligned}
 V_{1x, maks NS-EN 1998-1} &= \begin{bmatrix} 173 \\ 173 + 162 \\ 173 + 162 + 121 \\ 173 + 162 + 121 + 65 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 173 \\ 335 \\ 456 \\ 522 \end{bmatrix} kN, \\
 V_{2x, maks NS-EN 1998-1} &= \begin{bmatrix} -135 \\ -135 - 7 \\ -135 - 7 + 137 \\ -135 - 7 + 137 + 142 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} -135 \\ -142 \\ -6 \\ 137 \end{bmatrix} kN, \\
 V_{3x, maks NS-EN 1998-1} &= \begin{bmatrix} 53 \\ 53 - 68 \\ 53 - 68 - 33 \\ 53 - 68 - 33 + 82 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 53 \\ -15 \\ -48 \\ 34 \end{bmatrix} kN, \\
 V_{4x, maks NS-EN 1998-1} &= \begin{bmatrix} -13 \\ -13 + 31 \\ -13 + 31 - 33 \\ -13 + 31 - 33 + 21 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} -13 \\ 18 \\ -15 \\ 6 \end{bmatrix} kN.
 \end{aligned}$$

Det maksimale momentet ved terrengnivå om y -aksen fra hver mode blir

$$\begin{aligned}
 M_{1y, maks NS-EN 1998-1} &= (173 \cdot 12 + 162 \cdot 9 + 121 \cdot 6 + 65 \cdot 3) kNm = 4.5 \cdot 10^3 kNm, \\
 M_{2y, maks NS-EN 1998-1} &= (-135 \cdot 12 - 7 \cdot 9 + 137 \cdot 6 + 142 \cdot 3) kNm = -0.44 \cdot 10^3 kNm, \\
 M_{3y, maks NS-EN 1998-1} &= (53 \cdot 12 - 68 \cdot 9 - 33 \cdot 6 + 82 \cdot 3) kNm = 73 kNm, \\
 M_{4y, maks NS-EN 1998-1} &= (-13 \cdot 12 + 31 \cdot 9 - 33 \cdot 6 + 21 \cdot 3) kNm = -12 kNm.
 \end{aligned}$$

Vi gjennomfører både kombinasjon av de to første modene ved SRSS og av alle fire moder ved CQC fordi vi er interessert i hvordan endringen av formen på pseudoakselerasjonsspektret påvirker innflytelsesgraden til de høyere modene.

Når vi benytter SRSS på den maksimale skjærkraften fra de to første modene får vi følgende maksimal total skjærkraft i hver etasje:

$$V_{maks, x, 2 moder, SRSS, NS-EN 1998-1} = \begin{bmatrix} 220 \\ 364 \\ 456 \\ 539 \end{bmatrix} kN. \quad (A.9)$$

Det maksimale momentet blir tilsvarende

$$M_{y, maks, 2 moder, SRSS, NS-EN 1998-1} = 4.5 \cdot 10^3 kNm. \quad (A.10)$$

Nå beregner vi de samme lastvirkningene ved hjelp av CQC på alle fire moder. Korrelasjonskoeffisientene er gitt i ligning (8.64) og (8.65). Komplette kvadratiske kombinasjon av bidragene fra alle

fire moder gir

$$\mathbf{V}_{maks, x, 4 \text{ moder}, CQC, NS-EN 1998-1} = \begin{bmatrix} 224 \\ 364 \\ 459 \\ 541 \end{bmatrix} kN. \quad (\text{A.11})$$

Det maksimale momentet blir tilsvarende

$$M_{y, maks, 4 \text{ moder}, CQC, NS-EN 1998-1} = 4.5 \cdot 10^3 kNm. \quad (\text{A.12})$$

I det videre jobber vi med resultatet fra den komplette kvadratiske kombinasjonen siden denne generelt er den beste tilnærmelsen til lastvirkningene. Forstørrelsesfaktoren for utilsiktet torsjon er som før $\delta = 1.6$. Dermed blir

$$\mathbf{H}_{vk, x, NS-EN 1998-1} = 1.6 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 224 \\ 364 \\ 459 \\ 541 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 179 \\ 291 \\ 367 \\ 433 \end{bmatrix} kN. \quad (\text{A.13})$$

Nå går vi over til lastvirkningene i y -retning. Egensvingeperiodene fra ligning (8.30) innsettes i (8.89), hvilket gir

$$S_{ed NS-EN 1998-1}(T_{1y}) = a_g S \frac{2.5 T_C}{q T_{1y}} = 0.744 \cdot 1.25 \frac{2.5 \cdot 0.30}{1.5 \cdot 0.659} m/s^2 = 0.71 m/s^2, \quad (\text{A.14})$$

$$S_{ed NS-EN 1998-1}(T_{2y}) = a_g S \frac{2.5}{q} = 0.744 \cdot 1.25 \frac{2.5}{1.5} m/s^2 = 1.55 m/s^2, \quad (\text{A.15})$$

$$S_{ed NS-EN 1998-1}(T_{3y}) = a_g S \frac{2.5}{q} = 0.744 \cdot 1.25 \frac{2.5}{1.5} m/s^2 = 1.55 m/s^2, \quad (\text{A.16})$$

$$S_{ed NS-EN 1998-1}(T_{4y}) = a_g S \frac{2.5}{q} = 0.744 \cdot 1.25 \frac{2.5}{1.5} m/s^2 = 1.55 m/s^2. \quad (\text{A.17})$$

De maksimale tilsvarende statiske lastene finnes fra ligning (3.32), (3.33), (8.9), (8.31), (8.32) og (8.33), der pseudoakselerasjonen fra ligning (A.14) til (A.17) benyttes.

$$\mathbf{F}_{1y, maks, NS-EN 1998-1} = \frac{L_{1y}}{M_{1y}} \mathbf{m} \phi_{1y} S_{ed}(T_{1y}) = \begin{bmatrix} 246 & 230 & 171 & 92 \end{bmatrix}^T kN, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{F}_{2y, maks, NS-EN 1998-1} = \frac{L_{2y}}{M_{2y}} \mathbf{m} \phi_{2y} S_{ed}(T_{2y}) = \begin{bmatrix} -147 & -7 & 149 & 153 \end{bmatrix}^T kN, \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{F}_{3y, maks, NS-EN 1998-1} = \frac{L_{3y}}{M_{3y}} \mathbf{m} \phi_{3y} S_{ed}(T_{3y}) = \begin{bmatrix} 54 & -70 & -32 & 82 \end{bmatrix}^T kN, \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{F}_{4y, maks, NS-EN 1998-1} = \frac{L_{4y}}{M_{4y}} \mathbf{m} \phi_{4y} S_{ed}(T_{4y}) = \begin{bmatrix} -13 & 31 & -34 & 22 \end{bmatrix}^T kN. \quad (\text{A.21})$$

Den maksimale skjærkraften i hver etasje fra hver mode finnes fra de tilsvarende statiske lastene i

ligning (A.18) til (A.21),

$$\begin{aligned}
 V_{1y, maks, maks, NS-EN 1998-1} &= \begin{bmatrix} 246 \\ 246 + 230 \\ 246 + 230 + 171 \\ 246 + 230 + 171 + 92 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 246 \\ 476 \\ 647 \\ 739 \end{bmatrix} kN, \\
 V_{2y, maks, maks, NS-EN 1998-1} &= \begin{bmatrix} -147 \\ -147 - 7 \\ -147 - 7 + 149 \\ -147 - 7 + 149 + 153 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} -147 \\ -153 \\ -4 \\ 149 \end{bmatrix} kN. \\
 V_{3y, maks, NS-EN 1998-1} &= \begin{bmatrix} 54 \\ 54 - 70 \\ 54 - 70 - 32 \\ 54 - 70 - 32 + 82 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} 54 \\ -16 \\ -48 \\ 34 \end{bmatrix} kN. \\
 V_{4y, maks, NS-EN 1998-1} &= \begin{bmatrix} -13 \\ -13 + 31 \\ -13 + 31 - 34 \\ -13 + 31 - 34 + 22 \end{bmatrix} kN = \begin{bmatrix} -13 \\ 19 \\ -16 \\ 6 \end{bmatrix} kN.
 \end{aligned}$$

Det maksimale momentet ved terrengnivå om x -aksen fra hver mode blir

$$\begin{aligned}
 M_{1x, maks, NS-EN 1998-1} &= (246 \cdot 12 + 230 \cdot 9 + 171 \cdot 6 + 92 \cdot 3) kNm = 6.3 \cdot 10^3 kNm, \\
 M_{2x, maks, NS-EN 1998-1} &= (-147 \cdot 12 - 7 \cdot 9 + 149 \cdot 6 + 153 \cdot 3) kNm = -0.47 \cdot 10^3 kNm, \\
 M_{3x, maks, NS-EN 1998-1} &= (54 \cdot 12 - 70 \cdot 9 - 32 \cdot 6 + 82 \cdot 3) kNm = 74 kNm, \\
 M_{4y, maks, NS-EN 1998-1} &= (-13 \cdot 12 + 31 \cdot 9 - 34 \cdot 6 + 22 \cdot 3) kNm = -12 kNm.
 \end{aligned}$$

Når vi benytter SRSS på den maksimale skjærkraften fra de to første modene får vi følgende maksimal total skjærkraft i hver etasje:

$$V_{maks, y, 2 moder, SRSS, NS-EN 1998-1} = \begin{bmatrix} 287 \\ 500 \\ 647 \\ 754 \end{bmatrix} kN. \quad (A.22)$$

Det maksimale momentet blir

$$M_{x, maks, 2 moder, SRSS, NS-EN 1998-1} = 6.3 \cdot 10^3 kNm.$$

Nå beregner vi de samme lastvirkningene ved hjelp av CQC på alle fire moder. Korrelasjonskoeffisientene er gitt i ligning (8.84) og (8.85). Komplette kvadratisk kombinasjon av bidragene fra alle fire moder gir

$$V_{maks, y, 4 moder, CQC, NS-EN 1998-1} = \begin{bmatrix} 290 \\ 500 \\ 649 \\ 756 \end{bmatrix} kN. \quad (A.23)$$

Det maksimale momentet blir tilsvarende

$$M_{x, maks, 4 moder, CQC, NS-EN 1998-1} = 6.3 \cdot 10^3 \text{ kNm}. \quad (\text{A.24})$$

I det videre jobber vi med resultatet fra den komplette kvadratiske kombinasjonen. Forstørrelsesfaktoren for utilsiktet eksentrisitet er $\delta = 1.6$ for alle fire vindkryss. Det gir

$$\mathbf{H}_{vk, y, NS-EN 1998-1} = 1.6 \cdot \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 290 \\ 500 \\ 649 \\ 756 \end{bmatrix} \text{ kN} = \begin{bmatrix} 116 \\ 200 \\ 260 \\ 302 \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (\text{A.25})$$

Tillegg B

Script til Matlab-filer

B.1 Figur av kvadratet av absoluttverdien av frekvensresponsfunksjonen

```
% Kvadratet av absoluttverdien av frekvensresponsfunksjonen

k=1;
xi=0.05;

dbeta=0.01;
i=1;

for beta=-5:dbeta:5

    H5(i)=(1/k).*1./((1-beta.*beta).*(1-beta.*beta)+4.*xi.*xi.*beta.*beta);

    i=i+1;

end
beta = [-5:dbeta:5];
plot(beta,H5,'k')

hold on

xi=0.10;

dbeta=0.01;
i=1;

for beta=-5:dbeta:5

    H10(i)=(1/k).*1./((1-beta.*beta).*(1-beta.*beta)+4.*xi.*xi.*beta.*beta);
```

```

        i=i+1;

    end
    beta = [-5:dbeta:5];
    plot(beta,H10,'r')

    hold on

    xi=0.20;

    dbeta=0.01;
    i=1;

    for beta=-5:dbeta:5

        H20(i)=(1/k).*1./((1-beta.*beta).*(1-beta.*beta)+4.*xi.*xi.*beta.*beta);

        i=i+1;

    end
    beta = [-5:dbeta:5];
    plot(beta,H20,'g')

    axis([-2 2 0 110])
    xlabel('\varpi / \omega')
    ylabel('|H(\varpi)|^2')
    legend('\xi = 0,05','\xi = 0,10','\xi = 0,20')

```

B.2 Figur av spektral tetthet for tilnærmet hvit støy

```

% Spektral tetthet for tilnaermet hvit stoey

k=1;
S0=1;
xi=0.05;

dbeta=0.01;
i=1;

for beta=-5:dbeta:5

    H1(i)=S0.*(1/k).*1./((1-beta.*beta).*(1-beta.*beta)+4.*xi.*xi.*beta.*beta);

    i=i+1;

end
beta = [-5:dbeta:5];
plot(beta,H1,'k')

```

```

hold on

dbeta=0.01;
i=1;

for beta=-5:dbeta:5

    H2(i)=S0.*(1-0.1.*beta.*beta)./(1/k).*1./((1-beta.*beta)...
        ...*(1-beta.*beta)+4.*xi.*xi.*beta.*beta);

    i=i+1;

end
beta = [-5:dbeta:5];
plot(beta,H2,'r')

axis([-2 2 0 110])
xlabel('\varpi / \omega')
ylabel('|H(\varpi)|^2')
legend('Hvit støy','Tilnærmet hvit støy')

```

B.3 Korrelasjonskoeffisient

```

% Korrelasjonskoeffisient

xi=0.02;
dbeta=0.01;
i=1;

for beta=0:dbeta:1

    rho2(i)=8*xi*xi*(1+beta)*beta^(3/2)/((1-beta*beta)*...
        (1-beta*beta)+4*xi*xi*beta*(1+beta)*(1+beta));

    i=i+1;

end
beta = [0:dbeta:1];
plot(beta,rho2,'g')

hold on

xi=0.05;
dbeta=0.01;
i=1;

for beta=0:dbeta:1

```

```

rho5(i)=8*xi*xi*(1+beta)*beta^(3/2)/((1-beta*beta)*...
(1-beta*beta)+4*xi*xi*beta*(1+beta)*(1+beta));

i=i+1;

end
beta = [0:dbeta:1];
plot(beta,rho5,'k')

hold on

xi=0.1;
dbeta=0.01;
i=1;

for beta=0:dbeta:1

rho10(i)=8*xi*xi*(1+beta)*beta^(3/2)/((1-beta*beta)*...
(1-beta*beta)+4*xi*xi*beta*(1+beta)*(1+beta));

i=i+1;

end
beta = [0:dbeta:1];
plot(beta,rho10,'r')

text('Interpreter','latex',...
'String','$$\omega_j/\omega_l$$',...
'Position',[.455 0.94],...
'FontSize',12)
ylabel('\rho')
legend('\xi=0,02','\xi=0,05','\xi=0,10')

```

B.4 Figur av respons ved grunnakselerasjon i to hovedretninger

```

% Respons ved grunnakselerasjon i to hovedretninger

dB=0.01;
i=1;

for B=0:dB:1

rr(i)=1+0.3.*B;

i=i+1;

end

```

```

B = [0:dB:1];
plot(B,rr,'k')

hold on

dB=0.01;
i=1;

for B=0:dB:1

    r100(i)=(1+B.*B)^(1/2);

    i=i+1;

end
B = [0:dB:1];
plot(B,r100,'g')

hold on

dB=0.01;
i=1;

for B=0:dB:1

    r85(i)=(1+0.7225.*B.*B)^(1/2);

    i=i+1;

end
B = [0:dB:1];
plot(B,r85,'r')

axis([0 1 0.95 1.55])
xlabel('B')
ylabel(' |r(t)|_{\max} / |r_x(t)|_{\max} ')

```

B.5 Naturlige vinkelfrekvenser dobbeltsymmetrisk bygg

Scriptet gir de naturlige svingeformene (ϕ) i hver retning samt kvadratet av den naturlige vinkelfrekvensen tilhørende hver svingeform, $\lambda = \omega^2$.

```

%Egenverdier

M = [281143 0 0 0;0 296275 0 0;0 0 296275 0;0 0 0 296275];

Kx = (1000000).*[112.02105 -112.02105 0 0;...

```

```
...-112.02105 222.48875 -110.5677 0;...
...0 -110.5677 219.58235 -109.1145;...
...0 0 -109.1145 216.458];

A = inv(M)*Kx;

[phix,lambdax] = eig(A)

Ky = (1000000).*[221.42105 -221.42105 0 0;...
...-221.42105 441.38875 -219.9677 0;...
...0 -219.9677 438.48235 -218.5145;...
...0 0 -218.5145 435.358];

B = inv(M)*Ky;

[phiy,lambday] = eig(B)
```

Tillegg C

Script til Ansys

C.1 Respons i x -retning i henhold til NS 3491-12

```
/FILNAM,x-retning
/TITLE,X-retning

/PREP7
ET,1,3
ET,2,1
R,1,3.9,0.0203125,0.25,,,1685.626911
R,2,0.022676,0
R,3,3.9,0.0203125,0.25,,,2226.299694
R,4,0.0045,0
MP,EX,1,400000000000
MP,EX,2,210000000000
MP,PRXY,1,0.3
MP,DENS,1,2548.41998
MP,DENS,2,7850

K,1
K,2,0,3
K,3,0,6
K,4,0,9
K,5,0,12
K,6,4.8,0
K,7,4.8,3
K,8,4.8,6
K,9,4.8,9
K,10,4.8,12
K,11,9.6,0
K,12,9.6,3
K,13,9.6,6
```


K,14,9.6,9
K,15,9.6,12
K,16,14.4,0
K,17,14.4,3
K,18,14.4,6
K,19,14.4,9
K,20,14.4,12
K,21,19.2,0
K,22,19.2,3
K,23,19.2,6
K,24,19.2,9
K,25,19.2,12
K,26,24,0
K,27,24,3
K,28,24,6
K,29,24,9
K,30,24,12

TYPE,2
REAL,2
MAT,2
L,1,2
L,2,3
L,3,4
L,4,5
LESIZE,ALL,5
LMESH,1,4

TYPE,1
REAL,3
MAT,1
L,2,7
L,3,8
L,4,9
LESIZE,ALL,0.1
LMESH,5,7

TYPE,1
REAL,1
MAT,1
L,5,10
LESIZE,8,0.1
LMESH,8

TYPE,2
REAL,2
MAT,2
L,6,7
L,7,8
L,8,9
L,9,10
LESIZE,ALL,5

```
LMESH,9,12
```

```
TYPE,1  
REAL,3  
MAT,1  
L,7,12  
L,8,13  
L,9,14  
LESIZE,ALL,0.1  
LMESH,13,15
```

```
TYPE,1  
REAL,1  
MAT,1  
L,10,15  
LESIZE,16,0.1  
LMESH,16
```

```
TYPE,2  
REAL,2  
MAT,2  
L,11,12  
L,12,13  
L,13,14  
L,14,15  
LESIZE,ALL,5  
LMESH,17,20
```

```
TYPE,1  
REAL,3  
MAT,1  
L,12,17  
L,13,18  
L,14,19  
LESIZE,ALL,0.1  
LMESH,21,23
```

```
TYPE,1  
REAL,1  
MAT,1  
L,15,20  
LESIZE,24,0.1  
LMESH,24
```

```
TYPE,2  
REAL,2  
MAT,2  
L,16,17  
L,17,18  
L,18,19  
L,19,20  
LESIZE,ALL,5
```

LMESH, 25, 28

TYPE, 2
REAL, 4
MAT, 2
L, 11, 17
L, 12, 18
L, 13, 19
L, 14, 20
LESIZE, ALL, 19
LMESH, 29, 32

TYPE, 1
REAL, 3
MAT, 1
L, 17, 22
L, 18, 23
L, 19, 24
LESIZE, ALL, 0.1
LMESH, 33, 35

TYPE, 1
REAL, 1
MAT, 1
L, 20, 25
LESIZE, 36, 0.1
LMESH, 36

TYPE, 2
REAL, 2
MAT, 2
L, 21, 22
L, 22, 23
L, 23, 24
L, 24, 25
LESIZE, ALL, 5
LMESH, 37, 40

TYPE, 1
REAL, 3
MAT, 1
L, 22, 27
L, 23, 28
L, 24, 29
LESIZE, ALL, 0.1
LMESH, 41, 43

TYPE, 1
REAL, 1
MAT, 1
L, 25, 30
LESIZE, 44, 0.1

```
LMESH,44
```

```
TYPE,2
REAL,2
MAT,2
L,26,27
L,27,28
L,28,29
L,29,30
LESIZE,ALL,5
LMESH,45,48
NUMMRG,ALL
FINISH
```

```
/SOLU
ANTYPE,STATIC
NSEL,S,LOC,Y,0
D,ALL,UX,0
D,ALL,UY,0
ACEL,0,9.81,0
PSTRES,ON
ALLSEL
SOLVE
FINISH
```

```
/SOLU
ANTYPE,MODAL
CPINTF,ALL
MODOPT,LANB,15           !Beregner 15 moder
MXPAND,10,,,YES,,YES     !Skriver ut resultatene for de første 10 moder
NSEL,S,LOC,Y,0
D,ALL,UX,0
D,ALL,UY,0
PSTRES,ON
ALLSEL
SOLVE
FINISH
```

```
/SOLU
ANTYPE,SPECTR
SPOPT,SPRS,15,YES
SVTYP,2
SED,1,0,0
FREQ,0.25,0.30,0.40,0.50,0.60,0.666666666666667,0.70,0.80,1
FREQ,1.1,1.2,1.4,1.6,2,2.4,3,3.4,4
FREQ,10,11,12,13,14,16,20,30,40
SV,0.05,0.030515625,0.0439425,0.07812,0.1220625,0.17577,0.217,0.22785,0.2604,0.3255
SV,0.05,0.35805,0.3906,0.4557,0.5208,0.651,0.7812,0.9765,1.1067,1.302
SV,0.05,1.302,1.230981818,1.1718,1.121723077,1.0788,1.00905,0.9114,0.7812,0.7161
SVPLOT,OFF,0.05
DMPRAT,0.05
*GET,L1_M1,MODE,1,PFACT,,DIREC,X
```

```

*GET,L2_M2,MODE,2,PFACT,,DIREC,X
*GET,L3_M3,MODE,3,PFACT,,DIREC,X
*GET,L4_M4,MODE,4,PFACT,,DIREC,X
*GET,L5_M5,MODE,5,PFACT,,DIREC,X
SOLVE
*GET,D1L1_M1,MODE,1,MCOEF
*GET,D2L2_M2,MODE,1,MCOEF
*GET,D3L3_M3,MODE,1,MCOEF
*GET,D4L4_M4,MODE,1,MCOEF
*GET,D5L5_M5,MODE,1,MCOEF
FINISH

/SOLU
ANTYPE,SPECTR
CQC,,DISP
SOLVE
FINISH

/POST1
SET,LIST
/INP,,mcom
esel,s,REAL,,4
PRESOL,F
PRRSOL,F
FINISH

```

C.2 3D-modell belastet i x -retning i henhold til NS 3491-12

```

FINISH
/CLEAR
/FILNAM,3D-EC
/TITLE,3D-NS-EN-1998-1
/PREP7
ET,1,181
ET,2,8
R,1,0.25,0.25,0.25,0.25,0,108.0530071
R,2,0.005669,0
R,3,0.25,0.25,0.25,0.25,0,142.7115189
R,4,0.00225,0
MP,EX,1,400000000000
MP,EY,1,400000000000
MP,EZ,1,400000000000
MP,EX,2,210000000000
MP,PRXY,1,0.3
MP,DENS,1,2548.41998
MP,DENS,2,7850
K,1
K,2,0,0,3
K,3,0,0,6

```

```
K,4,0,0,9
K,5,0,0,12
K,6,4.8,0,0
K,7,4.8,0,3
K,8,4.8,0,6
K,9,4.8,0,9
K,10,4.8,0,12
K,11,9.6,0,0
K,12,9.6,0,3
K,13,9.6,0,6
K,14,9.6,0,9
K,15,9.6,0,12
K,16,14.4,0,0
K,17,14.4,0,3
K,18,14.4,0,6
K,19,14.4,0,9
K,20,14.4,0,12
K,21,19.2,0,0
K,22,19.2,0,3
K,23,19.2,0,6
K,24,19.2,0,9
K,25,19.2,0,12
K,26,24,0,0
K,27,24,0,3
K,28,24,0,6
K,29,24,0,9
K,30,24,0,12
K,31,0,4,0
K,32,0,4,3
K,33,0,4,6
K,34,0,4,9
K,35,0,4,12
K,36,4.8,4,0
K,37,4.8,4,3
K,38,4.8,4,6
K,39,4.8,4,9
K,40,4.8,4,12
K,41,9.6,4,0
K,42,9.6,4,3
K,43,9.6,4,6
K,44,9.6,4,9
K,45,9.6,4,12
K,46,14.4,4,0
K,47,14.4,4,3
K,48,14.4,4,6
K,49,14.4,4,9
K,50,14.4,4,12
K,51,19.2,4,0
K,52,19.2,4,3
K,53,19.2,4,6
K,54,19.2,4,9
K,55,19.2,4,12
```

K,56,24,4,0
K,57,24,4,3
K,58,24,4,6
K,59,24,4,9
K,60,24,4,12
K,61,0,11.6,0
K,62,0,11.6,3
K,63,0,11.6,6
K,64,0,11.6,9
K,65,0,11.6,12
K,66,4.8,11.6,0
K,67,4.8,11.6,3
K,68,4.8,11.6,6
K,69,4.8,11.6,9
K,70,4.8,11.6,12
K,71,9.6,11.6,0
K,72,9.6,11.6,3
K,73,9.6,11.6,6
K,74,9.6,11.6,9
K,75,9.6,11.6,12
K,76,14.4,11.6,0
K,77,14.4,11.6,3
K,78,14.4,11.6,6
K,79,14.4,11.6,9
K,80,14.4,11.6,12
K,81,19.2,11.6,0
K,82,19.2,11.6,3
K,83,19.2,11.6,6
K,84,19.2,11.6,9
K,85,19.2,11.6,12
K,86,24,11.6,0
K,87,24,11.6,3
K,88,24,11.6,6
K,89,24,11.6,9
K,90,24,11.6,12
K,91,0,15.6,0
K,92,0,15.6,3
K,93,0,15.6,6
K,94,0,15.6,9
K,95,0,15.6,12
K,96,4.8,15.6,0
K,97,4.8,15.6,3
K,98,4.8,15.6,6
K,99,4.8,15.6,9
K,100,4.8,15.6,12
K,101,9.6,15.6,0
K,102,9.6,15.6,3
K,103,9.6,15.6,6
K,104,9.6,15.6,9
K,105,9.6,15.6,12
K,106,14.4,15.6,0
K,107,14.4,15.6,3

```
K,108,14.4,15.6,6
K,109,14.4,15.6,9
K,110,14.4,15.6,12
K,111,19.2,15.6,0
K,112,19.2,15.6,3
K,113,19.2,15.6,6
K,114,19.2,15.6,9
K,115,19.2,15.6,12
K,116,24,15.6,0
K,117,24,15.6,3
K,118,24,15.6,6
K,119,24,15.6,9
K,120,24,15.6,12
K,121,10.8,7,3
K,122,10.8,8.6,3
K,123,13.2,8.6,3
K,124,13.2,7,3
K,125,10.8,7,6
K,126,10.8,8.6,6
K,127,13.2,8.6,6
K,128,13.2,7,6
K,129,10.8,7,9
K,130,10.8,8.6,9
K,131,13.2,8.6,9
K,132,13.2,7,9
```

```
TYPE,2
REAL,2
MAT,2
L,1,2
L,2,3
L,3,4
L,4,5
L,6,7
L,7,8
L,8,9
L,9,10
L,11,12
L,12,13
L,13,14
L,14,15
L,16,17
L,17,18
L,18,19
L,19,20
L,21,22
L,22,23
L,23,24
L,24,25
L,26,27
L,27,28
L,28,29
```


L, 29, 30
L, 31, 32
L, 32, 33
L, 33, 34
L, 34, 35
L, 36, 37
L, 37, 38
L, 38, 39
L, 39, 40
L, 41, 42
L, 42, 43
L, 43, 44
L, 44, 45
L, 46, 47
L, 47, 48
L, 48, 49
L, 49, 50
L, 51, 52
L, 52, 53
L, 53, 54
L, 54, 55
L, 56, 57
L, 57, 58
L, 58, 59
L, 59, 60
L, 61, 62
L, 62, 63
L, 63, 64
L, 64, 65
L, 66, 67
L, 67, 68
L, 68, 69
L, 69, 70
L, 71, 72
L, 72, 73
L, 73, 74
L, 74, 75
L, 76, 77
L, 77, 78
L, 78, 79
L, 79, 80
L, 81, 82
L, 82, 83
L, 83, 84
L, 84, 85
L, 86, 87
L, 87, 88
L, 88, 89
L, 89, 90
L, 91, 92
L, 92, 93
L, 93, 94

```
L,94,95
L,96,97
L,97,98
L,98,99
L,99,100
L,101,102
L,102,103
L,103,104
L,104,105
L,106,107
L,107,108
L,108,109
L,109,110
L,111,112
L,112,113
L,113,114
L,114,115
L,116,117
L,117,118
L,118,119
L,119,120
LESIZE,ALL,5
LMESH,1,96

TYPE,2
REAL,4
MAT,2
L,11,17
L,12,18
L,13,19
L,14,20
L,101,107
L,102,108
L,103,109
L,104,110
L,6,37
L,7,38
L,8,39
L,9,40
L,21,52
L,22,53
L,23,54
L,24,55
L,66,97
L,67,98
L,68,99
L,69,100
L,81,112
L,82,113
L,83,114
L,84,115
LESIZE,ALL,19
```

LMESH,97,120

TYPE,1

REAL,3

MAT,1

A,2,7,37,32

A,3,8,38,33

A,4,9,39,34

A,7,12,42,37

A,8,13,43,38

A,9,14,44,39

A,12,17,47,42

A,13,18,48,43

A,14,19,49,44

A,17,22,52,47

A,18,23,53,48

A,19,24,54,49

A,22,27,57,52

A,23,28,58,53

A,24,29,59,54

A,32,37,67,62

A,33,38,68,63

A,34,39,69,64

A,37,42,72,67

A,38,43,73,68

A,39,44,74,69

A,42,72,122,121

A,43,73,126,125

A,44,74,130,129

A,47,52,82,77

A,48,53,83,78

A,49,54,84,79

A,52,57,87,82

A,53,58,88,83

A,54,59,89,84

A,62,67,97,92

A,63,68,98,93

A,64,69,99,94

A,67,72,102,97

A,68,73,103,98

A,69,74,104,99

A,72,77,107,102

A,73,78,108,103

A,74,79,109,104

A,77,82,112,107

A,78,83,113,108

A,79,84,114,109

A,82,87,117,112

A,83,88,118,113

A,84,89,119,114

A,72,77,123,122

A,123,77,47,124

```

A,121,124,47,42
A,73,78,127,126
A,78,48,128,127
A,43,125,128,48
A,74,79,131,130
A,79,49,132,131
A,44,129,132,49
AESIZE,ALL,0.5
AMESH,1,54

```

```

TYPE,1
REAL,1
MAT,1
A,5,10,40,35
A,10,15,45,40
A,15,20,50,45
A,20,25,55,50
A,25,30,60,55
A,35,40,70,65
A,40,45,75,70
A,45,50,80,75
A,50,55,85,80
A,55,60,90,85
A,65,70,100,95
A,70,75,105,100
A,75,80,110,105
A,80,85,115,110
A,85,90,120,115
AESIZE,ALL,0.5
AMESH,55,69
NUMMRG,ALL
FINISH

```

```

/SOLU
ANTYPE,STATIC
NSEL,S,LOC,Z,0
D,ALL,UX,0
D,ALL,UY,0
D,ALL,UZ,0
ACEL,0,0,9.81
PSTRES,ON
ALLSEL
SOLVE
FINISH

```

```

/SOLU
ANTYPE,MODAL
CPINTF,ALL
MODOPT,LANB,15      !Beregner 15 moder
MXPAND,15,,,YES,,YES
NSEL,S,LOC,Z,0
D,ALL,UX,0

```

```

D,ALL,UY,0
D,ALL,UZ,0
PSTRES,ON
ALLSEL
SOLVE
FINISH

/SOLU
ANTYPE,SPECTR
SPOPT,SPRS,15,YES
SVTYP,2
SED,1,0,0
FREQ,0.30,0.5656854249,0.60,0.666666666666667,0.70,0.80,1
FREQ,1.1,1.2,1.4,1.6,2,2.4,3,3.4,4
FREQ,10,11,12,13,14,16,20,30,40
SV,0.05,0.1488,0.1488,0.1674,0.206666666666667,0.217,0.248,0.310
SV,0.05,0.341,0.372,0.434,0.496,0.62,0.744,0.93,1.054,1.24
SV,0.05,1.24,1.172363636,1.116,1.068307692,1.027428571,0.961,0.868,0.744,0.682
SVPLOT,OFF,0.05
DMPRAT,0.05
SOLVE
FINISH

/SOLU
ANTYPE,SPECTR
CQC,,DISP
SOLVE
FINISH

/POST1
SET,LIST
SUMTYPE,PRIN
/INP,,mcom
esel,s,REAL,,4
PRESOL,F          ! Print nodal solution
PRRSOL,F          ! Print reaction solution
FINISH

```

Referanser

- [1] James Ambrose og Dimitry Vergun. *Simplified building design for Wind and Earthquake Forces*. John Wiley & Sons, inc., tredje utgave, 1995.
- [2] Ansys. *Structural Analysis Guide*, 2009.
- [3] ATC. FEMA 400 - Improvement of Nonlinear Static Seismic Analysis Procedures, juni 2005.
- [4] P. G. Bergan og Tor G. Syvertsen. *Knekning av søyler og rammer*. Tapir, andre utgave, 1989.
- [5] Betongelementforeningen. *Betongelementboken bind A*. Betongelementforeningen, 1995.
- [6] Betongelementforeningen. *Betongelementboken bind C*. Betongelementforeningen, 2006.
- [7] Roger D. Borcherdt og Gary Glassmoyer. Influences of local geology on strong and weak ground motions in the San Francisco Bay region, California and their implications for site-specific building-code provisions. *The Loma Prieta earthquake of October 17, 1989 - strong ground motion*, 1994.
- [8] Anil K. Chopra. *Dynamics of Structures*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, tredje utgave, 2007.
- [9] Ray W. Clough og Joseph Penzien. *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, Inc, andre utgave, 1993.
- [10] Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha og Robert J. Witt. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & sons, inc, fjerde utgave, 2002.
- [11] Houshang Dezfulian og H. Bolton Seed. Seismic response of soil deposits underlain by sloping rock boundaries. Rapport, Earthquake Engineering Research Center, august 1969.
- [12] Earthquake Images. Online. http://www.johnmartin.com/earthquakes/eqshow/647008_01.htm
- [13] C. Henry Edwards og David E. Penney. *Calculus*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, sjette utgave, 2002.
- [14] Ahmed Y. Elghazouli, redaktør. *Seismic Design of Buildings to Eurocode 8*. Spon Press, 2009.
- [15] Michael N Fardis, Eduardo Calvalho, Amr Elnashai, Ezio Faccioli, Paolo Pinto og Andre Plumier. *Designer's Guide to EN 1998-1 and EN 1998-5 Eurocode 8*. Thomas Telford Publishing, 2005.
- [16] Tor Erik Hals. *Konstruksjonsmekanikk - Enkel statikk og mekanikk*. Tapir, tredje utgave, 1999.
- [17] William B. Joyner og David M. Boore. Measurement, characterization, and prediction of strong ground motion. *Proceedings of Earthquake Engineering & Soil Dynamics II*, side 43–97, 1988.
- [18] Armer der Kiureghian. A Response Spectrum Method for Random Vibration Analysis of MDF Systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 9:419–435, 1981.
- [19] Loren D. Lutes og Shahram Sarkani. *Random Vibrations - Analysis of Structural and Mechanical Systems*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2004.

- [20] Peter Maczo og Pierre-Yves Bard. Wave diffraction, amplification and differential motion near strong lateral discontinuities. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 83(1):85–106, februar 1993.
- [21] D. E. Newland. *An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis*. Dover Publications, Inc, Mineola, N.Y., tredje utgave, 1993.
- [22] Nathan M. Newmark og William J. Hall. Procedures and criteria for earthquake resistant design. *Building Science Series*, (46):209–236, 1973.
- [23] Nathan M. Newmark og William J. Hall. *Earthquake Spectra and Design*. Earthquake Engineering Research Institute, Oakland, CA, 1982.
- [24] Nathan M. Newmark og Emilio Rosenblueth. *Fundamentals of Earthquake Engineering*. Prentice Hall, inc, Englewood Cliffs, NJ, 1971.
- [25] NORSAR. Online. <http://jordskjelv.no/jordskjelv/norge.html>.
- [26] NORSAR. Online. <http://jordskjelv.no/jordskjelv/tektonikk.html>.
- [27] NORSAR. Online. <http://jordskjelv.no/jordskjelv/intensitet.html>.
- [28] NORSAR. Seismic Zonation of Norway. Rapport, NFR/NORSAR i samarbeid med Norwegian Geotechnical Institute, mars 1998.
- [29] Norsk Geoteknisk Forening. Peleveiledningen 2005. Den Norske Pelekomité, 2005.
- [30] Norsk Stål. Online. http://www.norskstaal.no/varekatalog/varekatalog.aspx?varegr=52_1#.
- [31] Robert Park og Thomas Paulay. *Reinforced Concrete Structures*. John Wiley & Sons, 1975.
- [32] M. J. Pender. Aseismic pile foundation design analysis. *Bulleting of the New Zealand National Society for earthquake Engineering*, 26(1):49–160, mars 1993.
- [33] Oleg Petelin. Weather anomalies and natural disasters. Online.
- [34] Raadgivende Ingeniørers Forening og Betongelementforeningen. *Realistisk dimensjonering for jordskjelv*, mars 2007.
- [35] ANDRES FELIPE ALONSO RODRIGUEZ. Developement of a two dimensional, stochastic methodology to assess seismic site response. Hovedfagsoppgave, Università degli Studi di Pavia, desember 2008.
- [36] SeismoSignal - A computer program for signal processing of strong-motion data. Online, 2004. <http://www.seismosoft.com>.
- [37] Standard Norge. *NS 3472:2001 Prosjektering av stålkonstruksjoner - Beregnings- og konstruksjonsregler*, september 2001.
- [38] Standard Norge. *NS 3490:2004 Prosjektering av konstruksjoner - Krav til pålitelighet*, desember 2004.
- [39] Standard Norge. *NS 3491-12: Prosjektering av konstruksjoner - Dimensjonerende laster - Del 12: Laster fra seismiske påvirkninger*, desember 2004.
- [40] Standard Norge. *NS-EN 1991-1-1:2002+NA:2008 - Eurocode 1: Laster på konstruksjoner - Del 1-1: Allmene laster - Tetthet, egenvekt, nyttelaster i bygninger*, februar 2008.
- [41] Standard Norge. *NS-EN 1992-1-1:2004+NA:2008 - Eurocode 2: Prosjektering av betongkonstruksjoner - Del 1-1: Allmene regler og regler for bygninger*, november 2008.
- [42] Standard Norge. *NS-EN 1998-1:2004+NA:2008 - Eurocode 8: Prosjektering av konstruksjoner for seismisk påvirkning - Del 1: Allmene regler, seismiske laster og regler for bygninger*, februar 2008.

- [43] Standard Norge. *NS-EN 1998-5:2004+NA:2008 - Eurocode 8: Prosjektering av konstruksjoner for seismisk påvirkning - Del 5: Fundamenter, støttestruksjoner og geotekniske forhold*, mai 2008.
- [44] Standard Norge. *NS-EN 1991-1-4:2005+NA:2009 - Eurocode 1: Laster på konstruksjoner - Del 1-4: Allmene laster - Vindlaster*, september 2009.
- [45] StruSoft company. *FEM-Design's User's Guide*, september 2005.
- [46] StruSoft company. *FEM-Design Applied Theory and Design*, april 2008.
- [47] Strutural Design Software in Europe AB. *FEM-Design Applied Theory and Design*, mars 2010.